21世纪应用型本科规划教材

数 学 实 验

——基于几何画板、Excel 软件

郭李芷　主　编

吴志远　副主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书选择了数列极限、级数一致收敛、非线性方程近似解、定积分的黎曼和、空间曲面的建构、分形图形等内容，收集了“3*N*+1 问题”等名题、趣题资料。以几何画板、Excel 软件为实验工具，采取实验案例的形式，组织了 14 个验证性实验。每个实验案例都明确了实验目的、实验内容、实验思路、软件技术要点和实验设计，以方便学生实验，引导学生在探索和实践的过程中发现现象、总结规律、学习数学知识。力图使学生通过实验增强相关理论知识、提高实践技能、培养创新能力、激发学习兴趣、提高学习积极性。

本书可作为高等院校数学及理工科相关专业数学实验课程的教材，也可作为数学及理工科相关专业相关课程的实践课程用书，还可作为高校理工科学生学习几何画板使用技能的参考用书。

图书在版编目 (CIP) 数据

数学实验：基于几何画板、Excel 软件 / 郭李芒主编. —北京：电子工业出版社，2018.2
ISBN 978-7-121-33389-7

I. ①数… II. ①郭… III. ①高等数学－实验－高等学校－教材 IV. ①O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 325738 号

策划编辑：王晓庆
责任编辑：王晓庆
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×980　1/16　印张：9.5　　字数：243 千字
版　　次：2018 年 2 月第 1 版
印　　次：2018 年 2 月第 1 次印刷
定　　价：36.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010) 88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：(010) 88254113，wangxq@phei.com.cn。

前　言

作者于 2009 年秋—2012 年秋期间承担钦州学院 2007—2010 级本科数学与应用数学专业“数学实验”课程的教学任务。在此期间，主编于 2010 年 7 月—2012 年 9 月主持新世纪广西高等教育教学改革工程立项项目“基于弱数学功能工具软件的数学实验课程教学的研究与实践（2010JBG092）”的研究，对几何画板、Excel 等数学功能较弱的软件应用于数学实验的可能性和适应性，以及弱数学功能工具软件应用于数学实验课程教学的原则和方法，适宜弱数学功能工具软件实验课题的选择和设计等进行了探索。

项目研究成果表明：利用几何画板、Excel 等弱数学功能工具软件进行数学实验教学是现实的、可行的。四届学生的数学实验教学实践也充分验证了这一结论。基于这一点，本书作者选择了几何画板、Excel 等大众化软件作为数学实验工具，根据项目研究和教学实践中所获得的关于弱数学功能工具软件应用于数学实验课程教学的成果和经验，从国内众多高校“数学实验”课程所关注的数学专业基础课的理论和知识入手，选择了极限、方程的近似解、函数级数图像、定积分的黎曼和、曲线的绘制、空间曲面的建构、分形与迭代等内容。结合作者数学教学实践的体会，收集了“$3N+1$ 问题”、“幸存者问题”等数学名题和趣题资料。按照案例教学法的特点，以实验案例的形式，组织 14 个验证性实验形成本书。本书以培养创新能力为目标，着眼于数学的学习方法，强调学生自主探索和实践。每个实验案例都明确了实验目的、实验内容、实验思路、技术要点和实验设计，以方便学生实验，引导学生在探索和实践的过程中发现现象、总结规律、学习数学知识。同时注重知识性、技能性，关注趣味性；力图使学生通过实验，不仅能掌握相关理论知识，提高实践技能，培养创新能力，还能激发学习兴趣，提高学习积极性。

本书有以下特色。

（1）实验进入门槛低。本书从数学实验工具软件对读者创新意识和实践能力培养效果的影响出发，选择几何画板、Excel 等数学功能较弱的大众化软件作为工具，实验条件容易满足，软件基本使用容易掌握，入门时间成本低，可降低实验的难度，扩大读者受益面。

（2）实验过程开放性好。本书从数学实验工具软件对实验过程开放性影响的视角出发，选择使用几何画板、Excel 等软件进行数学实验工具软件，使实验过程更具开放性，实验中数学建构和问题解决过程更易呈现，使用者的创造性工作能力可得到更有效的锻炼，对读者创新意识和实践能力的培养有良好效果。

（3）适应性强。本书内容紧扣高等数学、数学分析、解析几何等课程的基础理论和知识，

以案例的形式组织验证性实验，着眼于数学的学习方法，强调读者自主探索和实践；可作为数学专业开设数学实验课程的教材，也可作为数学专业数学分析和解析几何等课程或其他理工科专业高等数学等课程的实践课程用书。

由于作者水平有限，本书在编写和内容的组织上必定存在不足之处，敬请同行及读者批评指正。

作　者

目　　录

实验 1　圆周率的近似计算 …… 1

1.1　割圆术 …… 1

1.2　韦达公式 …… 5

1.3　级数方法 …… 8

1.4　蒙特卡罗法 …… 11

实验 2　极限 …… 16

2.1　数列极限 …… 16

2.2　自变量趋向 ∞ 的函数极限 …… 19

2.3　自变量趋向 a 的函数极限 …… 22

实验 3　迭代法求方程的近似解 …… 28

3.1　简单迭代法求方程的近似解 …… 28

3.2　牛顿切线法求方程的近似解 …… 32

实验 4　函数级数图像 …… 37

4.1　函数级数图像的绘制 …… 37

4.2　函数级数一致收敛的几何意义 …… 40

4.3　函数 $f(x)$ 及其麦克劳林级数图像的比较 …… 44

实验 5　定积分的黎曼和 …… 48

5.1　梯形面积的另类计算方法 …… 48

5.2　定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的黎曼和算法 …… 50

实验 6　曲线的绘制 …… 56

6.1　平面曲线的绘制 …… 56

6.2　空间曲线的绘制 …… 60

实验 7　空间曲面的构建 …… 65

7.1　曲面绘制的基础网格工具 …… 65

7.2　3D 坐标系的一种构建 …… 68

7.3　曲面网状图的绘制 …… 70

实验 8　旋转曲面的构建 …… 74

8.1　任意曲线的绘制 …… 74

8.2 旋转轴和曲线的映射 …… 76
8.3 曲线绕轴旋转生成旋转曲面 …… 77
8.4 由纬圆变动生成旋转曲面 …… 82

实验 9 双曲抛物面的构建 …… 85
9.1 抛物线和双曲线的基本画法 …… 85
9.2 抛物线沿抛物线滑动构建双曲抛物面 …… 90
9.3 双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面 …… 93

实验 10 笛沙格定理和帕斯卡定理的应用 …… 96
10.1 笛沙格定理在平面与特殊曲面交线绘制方面的应用 …… 96
10.2 帕斯卡定理在二次曲线绘制上的应用 …… 100

实验 11 分形与迭代 …… 105
11.1 二叉树的绘制 …… 105
11.2 雪花曲线的绘制 …… 108
11.3 勾股树的绘制 …… 112

实验 12 数字规律的验证 …… 116
12.1 黑白棋子问题 …… 116
12.2 幸存者问题 …… 118
12.3 “3*N*+1”问题 …… 121

实验 13 数字规律的探索 …… 124
13.1 数字怪圈 …… 124
13.2 “平方数对半和” …… 128

实验 14 线性规划的求解 …… 131
14.1 线性规划的求解 …… 131
14.2 线性方程组的求解 …… 136
14.3 最短路问题的求解 …… 139

参考文献 …… 144

实验 1　圆周率的近似计算

圆周率 π 是一个重要的常数，从古人最初将 3 作为 π 的近似值，到利用大型计算机算出 π 的小数点后 1000 亿位，人们对 π 的研究持续了两千多年。了解 π 值的一些计算方法，是一件很有意义的事情。

【实验目的】

通过对割圆术、韦达公式、级数方法、蒙特卡罗法等计算圆周率的方法的使用，使读者掌握圆周率近似计算的若干方法，以及利用几何画板软件实现的技巧，并在使用中感受数学思想和数学方法的发展过程。

1.1　割　圆　术

中国数学家刘徽利用圆内接正多边形求 π 的近似值，他的方法被后人称为割圆术。刘徽用割圆术一直算到圆内接正 192 边形，得出精确到两位小数的 π 值。

【实验内容】

利用几何画板的迭代功能，绘制边数可变的圆内接正 n 边形和圆外切正 n 边形。当 n 逐渐增大时，正 n 边形的面积逐渐逼近圆的面积。通过计算正 n 边形面积与边心距平方的比，可算出圆周率的近似值。

【实验思路】

以点 A 为圆内接正 n 边形的中心，先作圆内接正 n 边形的一个顶点 B，将 B 绕 A 旋转 $360^\circ/n$，得到与 B 相邻的下一个顶点 A'。将 B 绕 A 旋转 $360^\circ/2n$，得到与圆内接正 n 边形有共同中心 A 的圆外切正 n 边形的一个顶点 B'，B' 再绕 A 旋转 $360^\circ/n$，即得到与 B' 相邻的圆外切正 n 边形的下一个顶点 B''。以点 B 为原像、A' 为初像进行深度迭代，得到边数由参数 n 控制的正多边形，再通过计算正 n 边形的面积，计算圆周率的近似值。

【软件技术要点】

1．【标记角度】及【旋转】菜单项的使用。
2．深度迭代的方法。
3．参数选项的设置。

【实验设计】

1．单击【数据】菜单的【新建参数】，弹出新建参数对话框，将名称设为 n 、值设为 3、单位选择“无”，单击“确定”按钮设置新参数 n=3。选定参数 n=3，右击弹出快捷菜单，选择属性菜单项的“动画参数”选项卡，“新建动画”中的变化选择“离散的”，“键盘调节”选择“改变以：1 单位”，单击“确定”按钮（图 1.1-1）。

图 1.1-1

2．单击【编辑】菜单的【参数选项】，弹出参数选项对话框，将“单位”选项卡中的“角度（度）”、“距离（厘米）”、“其他（斜率、比……）”的精确度都设为十万分之一，选择应用于当前画板，单击“确定”按钮。

3．单击【数据】菜单的【计算】，弹出新建计算对话框，输入 $360°/n$（逐个输入 3、6、0 后，单击“单位”下拉列表选择“度”，单击“÷”后将光标移到对话框外单击参数 n），单击“确定”按钮，窗口即出现“$\dfrac{360°}{n}=120°$”；再单击【数据】菜单的【计算】，弹出新建计算对话框，输入 $360°/2n$，单击“确定”按钮，窗口即出现“$\dfrac{360°}{2\cdot n}=60°$”。

4．用画线工具画水平线段 AB，使点 A 位于窗口较中央的位置。用选择工具选定 A、B 两点，单击【度量】菜单的【距离】，得出 A、B 两点的距离。

5．用选择工具选定点 A，单击【变换】菜单中的【标记中心】，将点 A 标记为旋转中心；用选择工具选定“$\dfrac{360°}{n}=120°$”，单击【变换】菜单中的【标记角度】，将“$\dfrac{360°}{n}=120°$”标记为旋转角；用选择工具选定点 B，单击【变换】菜单中的【旋转】，弹出旋转对话框（图 1.1-2），“旋转参数”选择标记角度，旋转中心为 A，单击“旋转”按钮，得旋转像点 B'；将像点 B' 的标签改为 A'，用选择工具选定 A、A'，用画线工具作线段 AA'。

6．用选择工具选定“$\dfrac{360°}{2\cdot n}=60°$”，单击【变换】菜单中的【标记角度】，将“$\dfrac{360°}{2\cdot n}=60°$”标记为旋转角；用选择工具重新选定点 B，单击【变换】菜单中的【旋转】，弹出旋转对话框，“旋转参数”选择标记角度，旋转中心为 A，单击“旋转”按钮，得旋转像点 B'，用选择工具

选定“$\frac{360°}{n}=120°$”，单击【变换】菜单中的【标记角度】，将“$\frac{360°}{n}=120°$”标记为旋转角，再单击【变换】菜单中的【旋转】，弹出旋转对话框，旋转参数选择标记角度，旋转中心为 A，单击“旋转”按钮，将点 B' 旋转得像点 B''。

7．用选择工具依次选定 A、B' 和 A、B'' 两对点，单击【构造】菜单中的【射线】作射线 AB' 和 AB''；用选择工具选定点 A' 和线段 AA'，单击【构造】菜单中的【垂线】，作过 A' 且与线段 AA' 垂直的直线 j；用选择工具选定射线 AB' 和直线 j，单击【构造】菜单中的【交点】，作射线 AB' 和直线 j 的交点 C；用同样的方法作射线 AB'' 和直线 j 的交点 D（图 1.1-3）。

图 1.1-2

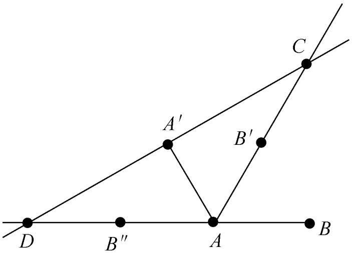


图 1.1-3

8．选定除 A、A'、B、C、D 这 5 个点以外的其余几何对象，单击【显示】菜单中的【隐藏对象】，隐藏其余几何对象，保留 A、A'、B、C、D 这 5 个点。

9．用选择工具选定 B、A' 两点，单击【构造】菜单中的【线段】，作线段；用选择工具选定 C、D 两点，单击【构造】菜单中的【线段】，作线段 CD。

10．用选择工具依次选定点 B 和参数 n，按 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框，迭代对话框中迭代的原像为 B，将初像设为 A'（图 1.1-4）；单击【显示】按钮，在菜单中选择“完整迭代”（在相应项上打钩）（图 1.1-5）；单击【结构】按钮，在菜单中选择“所有对象的像”，不选“生成迭代数据表”（图 1.1-6）；单击“迭代”按钮，得迭代后的图形（图 1.1-7）。

图 1.1-4

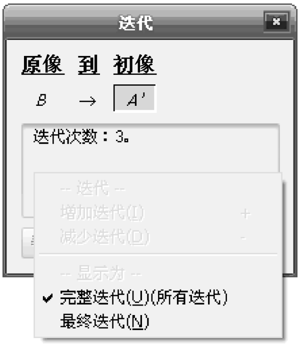


图 1.1-5

图 1.1-6

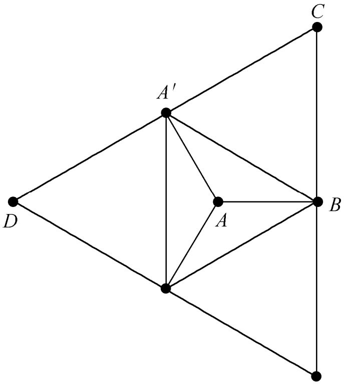
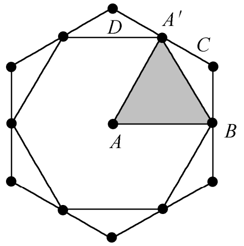


图 1.1-7

11．用选择工具依次选定 A 、B 、A' 三个点，单击【构造】菜单中的【三角形内部】，构造三角形 ABA' ，单击【度量】菜单中的【面积】，得出三角形 ABA' 的面积，单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，依次输入 n 、$*$、面积 $\triangle ABA'$ ，计算出圆内接正 n 边形的面积。用同样的方法计算圆外切正 n 边形的面积。用选择工具选定三角形 ABA' ，右击弹出快捷菜单，单击【颜色】菜单项，在颜色盘中选择适当的颜色用来改变三角形 ABA' 的颜色。若需改为白色，单击颜色盘中的【其他】打开颜色选择器，将红、绿、蓝三色的值均设为 255 后，单击“确定”按钮即可。

12．单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，依次输入 $n*$面积 $\triangle ABA' \div (AB * AB)$后，单击“确定”按钮得圆周率近似值，得出由圆内接正 n 边形面积计算而得的圆周率近似值。用同样的方法可计算由圆外切正 n 边形面积计算而得的圆周率近似值（图 1.1-8）。



多边形边数 = 600

由圆内接正n边形计算而得的圆周率近似值 = 2.59808

由圆外切正n边形计算而得的圆周率近似值 = 3.46410

图 1.1-8

13．将参数 n 的标签改为“多边形边数”。将 $n*$面积 $\triangle ABA' \div (AB * AB)$这一度量值的标签改为“由圆内接正 n 边形面积计算而得的圆周率近似值”。用同样的方法将 $n*$面积 $\triangle ACD \div (AB * AB)$这一度量值的标签改为“由圆外切正 n 边形面积计算而得的圆周率近似值”（图 1.1-8）。

14．将以上制作的课件以“割圆术计算圆周率近似值.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“割圆术计算圆周率近似值.gsp”。

2．改变“多边形边数”参数的数值，观察圆周率的近似值。记录多边形边数为 500 时由圆内接正 n 边形面积计算和由圆外切正 n 边形面积计算而得的圆周率近似值；分别记录“由圆内接正 n 边形面积计算而得的圆周率近似值”和“由圆外切正 n 边形面积计算而得的圆周率近似值”精确到千分位时正 n 边形的边数。

3．对课件“割圆术计算圆周率近似值.gsp”进行修改，使之能够计算圆内接正 n 边形面积和圆外切正 n 边形面积误差值，并记录误差值小于 0.001cm^2 时正 n 边形的边数及边心距 AB 的长度。

【经验点拨】

运行程序需改变参数大小时，可选定参数单击【显示】菜单中的【生成参数的动画】，弹出运动控制台使用。也可选定参数单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】/【动画】，打开操作类按钮运动参数的属性对话框，设置操作类按钮供程序运行时使用。

1.2　韦 达 公 式

【实验内容】

利用几何画板的迭代功能，通过韦达公式

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots$$

计算圆周率的近似值。

韦达公式的推导过程如下。

由三角函数的倍角公式，有

$$\begin{aligned}\sin x&=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\&=4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\\&=8\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\\&=2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\end{aligned}$$

由于当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{2^n}{x}\sin\dfrac{x}{2^n}\to 1$，所以当 $n\to\infty$ 时

$$\frac{\sin x}{x}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

令 $x=\dfrac{\pi}{2}$，得

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cos\frac{\pi}{2^4}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

再由 $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 及半角公式 $\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$，有

$$\cos\frac{\pi}{2^3}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{2^4}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^3}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

一般地，有

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\quad\text{（式中含 } n \text{ 重根号）}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}&=\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cos\frac{\pi}{2^4}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots\end{aligned}$$

【实验思路】

新建参数 $x=0$，计算 $\sqrt{2+x}$，新建参数 $n=1$。以 $x=0$ 为原像、$\sqrt{2+x}$ 为初像进行深度迭代，可得到 $\sqrt{2}$、$\sqrt{2+\sqrt{2}}$、$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$、$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ 的值，从而计算出圆周率 π 的近似值。

【软件技术要点】

1．深度迭代。

2．参数选项的设置。

3．迭代数据表的使用。

【实验设计】

1．单击【编辑】菜单的【参数选项】，弹出参数选项对话框，将“单位”选项卡中“其他（斜率、比……）”的精确度设为十万分之一，选择应用于当前画板，单击“确定”按钮。

2．单击【数据】菜单的【新建参数】，弹出新建参数对话框，将名称设为 x 、值设为 0、单位选择“无”，单击“确定”按钮，设置新参数 $x=0$ 。选定参数 $x=0$ ，右击弹出快捷菜单，选择属性菜单项的“动画参数”选项卡，新建动画变化选择“离散的”，键盘调节选择“改变以 1 单位”，单击“确定”按钮。

3．单击【数据】菜单的【计算】，弹出计算对话框，单击“函数”按钮，弹出函数下拉列表，选择函数 sqrt ，在其自变量处输入“ $2+x$ ”，单击“确定”按钮，计算 $\sqrt{2+x}$ 。

4．单击【数据】菜单的【计算】，弹出新建计算对话框，单击窗口中的计算量 $\sqrt{2+x}$ 后输入“÷2”，单击“确定”按钮，计算 $\dfrac{\sqrt{2+x}}{2}$ 。

5．单击【数据】菜单的【新建参数】，弹出新建参数对话框，将名称设为 s 、值设为 1 、单位选择“无”，单击“确定”按钮设置新参数 $s=1$ 。

6．单击【数据】菜单的【计算】，弹出新建计算对话框，依次单击窗口中的参数 $s=1$ 、计算对话框中的“*”、窗口中的计算量 $\dfrac{\sqrt{2+x}}{2}$ ，单击“确定”按钮，计算 $s\cdot\dfrac{\sqrt{2+x}}{2}$ 。

7．单击【数据】菜单的【计算】，弹出新建计算对话框，输入“2÷”后单击窗口中的计算量 $s\cdot\dfrac{\sqrt{2+x}}{2}$ ，单击“确定”按钮，计算 $\dfrac{2}{s\cdot\dfrac{\sqrt{2+x}}{2}}$ 。

8．单击【数据】菜单的【新建参数】，弹出新建参数对话框，将名称设为 n 、值设为 1、单位选择“无”，单击“确定”按钮设置新参数 $n=1$ 。

9．用选择工具依次选定参数 $x=0$ 、参数 $s=1$ 、参数 $n=1$ ，按 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框，将原像 x 的初像设为 $\sqrt{2+x}$ ，将原像 s 的初像设为 $s\cdot\dfrac{\sqrt{2+x}}{2}$ ；单击“显示”按钮，在菜单中选择“完整迭代”（在相应项上打钩）（图 1.2-1）；单击“迭代”按钮，得迭代数据表（图 1.2-2）。

10．将以上制作的课件以“韦达公式计算圆周率近似值.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“韦达公式计算圆周率近似值.gsp”。

2．用选择工具选定参数 $n=1$ ，按键盘上的“+”、“−”键改变参数 n 的数值，观察表中

$\dfrac{2}{s\cdot\dfrac{\sqrt{2+x}}{2}}$一列值的变化情况，此列中的值即圆周率的近似值。记录当圆周率的值已精确到小数点后第 5 位，即 3.14159 时参数 n 的取值情况。

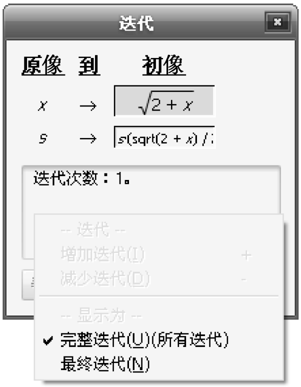


图 1.2-1

n	$\sqrt{2+x}$	$\frac{\sqrt{2+x}}{2}$	$s\cdot\frac{\sqrt{2+x}}{2}$	$\frac{2}{\left(s\cdot\frac{\sqrt{2+x}}{2}\right)}$
0	1.41421	0.70711	0.70711	2.82843
1	1.84776	0.92388	0.65328	3.06147
2	1.96157	0.98079	0.64073	3.12145
3	1.99037	0.99518	0.63764	3.13655
4	1.99759	0.99880	0.63688	3.14033
5	1.99940	0.99970	0.63668	3.14128
6	1.99985	0.99992	0.63664	3.14151
7	1.99996	0.99998	0.63662	3.14157
8	1.99999	1.00000	0.63662	3.14159
9	2.00000	1.00000	0.63662	3.14159

图 1.2-2

【经验点拨】

进行深度迭代，选定参数时单击参数的顺序很重要。可尝试不按顺序选定参数迭代进行体验。

1.3 级 数 方 法

【实验内容】

利用几何画板的迭代功能，通过级数

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots$$

或级数

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\frac{1}{(\sqrt{3})^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(\sqrt{3})^5}-\frac{1}{7}\frac{1}{(\sqrt{3})^7}+\cdots$$

计算圆周率的近似值。

两个级数公式的推导过程如下。

将 $f(x)=\arctan x$ 展开为麦克劳林级数，有

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad -1 < x \leqslant 1$$

令 $x = 1$，有

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

令 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$，有

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\frac{1}{(\sqrt{3})^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(\sqrt{3})^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{(\sqrt{3})^7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}\frac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}} + \cdots$$

从而有

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\cdot 3^n} + \cdots\right)$$

【实验思路】

新建参数 $s = 0$，计算 $s + \frac{(-1)^k}{2k+1}$，新建参数 $n = 1$。以 $s = 0$ 为原像、$s + \frac{(-1)^k}{2k+1}$ 为初像进行深度迭代，即可求得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ 的前 n 项和，从而计算出圆周率 π 的近似值。

【软件技术要点】

1．深度迭代。
2．参数选项的设置。

【实验设计】

1．单击【编辑】菜单的【参数选项】，弹出参数选项对话框，将“单位”选项卡中“其他（斜率、比……）”的精确度设为十万分之一，选择应用于当前画板，单击“确定”按钮。

2．单击【数据】菜单的【新建参数】，弹出新建参数对话框，将名称设为 k、值设为 0、单位选择“无”，单击“确定”按钮，设置新参数 $k = 0$。

3．单击【数据】菜单的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 $k + 1$。

4．单击【数据】菜单的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 $\frac{(-1)^k}{2\cdot k+1}$。

5．单击【数据】菜单的【新建参数】，弹出新建参数对话框，将名称设为 s、值设为 0、单位选择“无”，单击“确定”按钮，设置新参数 $s = 0$。

6．单击【数据】菜单的【计算】，弹出新建计算对话框，依次单击窗口中的参数 $s = 0$、

计算对话框中的“+”、窗口中的计算量$\dfrac{(-1)^k}{2\cdot k+1}$，单击“确定”按钮，计算$s+\dfrac{(-1)^k}{2\cdot k+1}$。

7．单击【数据】菜单的【计算】，弹出新建计算对话框，输入“4*”后单击窗口中的计算量$s+\dfrac{(-1)^k}{2\cdot k+1}$，单击“确定”按钮，计算$4\cdot\left(s+\dfrac{(-1)^k}{2\cdot k+1}\right)$。

8．单击【数据】菜单的【新建参数】，弹出新建参数对话框，将名称设为n、值设为1、单位选择“无”，单击“确定”按钮，设置新参数$n=1$。

9．用选择工具依次选定参数$k=0$、参数$s=0$、参数$n=1$，按Shift键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框，将原像k的初像设为$k+1$，将原像s的初像设为$s+\dfrac{(-1)^k}{2\cdot k+1}$；单击【显示】按钮，在菜单中选择“完整迭代”（在相应项上打钩）（图1.3-1）；单击“迭代”按钮，得迭代数据表（图1.3-2）。

10．将以上制作的课件以“级数方法计算圆周率近似值.gsp”保存。

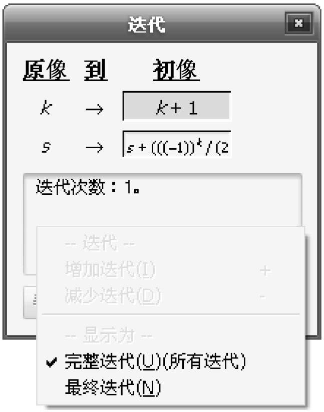


图 1.3-1

n	$k+1$	$\dfrac{(-1)^k}{2\cdot k+1}$	$s+\dfrac{(-1)^k}{2\cdot k+1}$	$4\cdot\left(s+\dfrac{(-1)^k}{2\cdot k+1}\right)$
0	1.00000	1.00000	1.00000	4.00000
1	2.00000	−0.33333	0.66667	2.66667
2	3.00000	0.20000	0.86667	3.46667
3	4.00000	−0.14286	0.72381	2.89524
4	5.00000	0.11111	0.83492	3.33968
5	6.00000	−0.09091	0.74401	2.97605
6	7.00000	0.07692	0.82093	3.28374
7	8.00000	−0.06667	0.75427	3.01707
8	9.00000	0.05882	0.81309	3.25237

图 1.3-2

【实验要求】

1．运行课件“级数方法计算圆周率近似值.gsp”。

2．用选择工具选定参数 $n=1$，按键盘上的“+”、“−”键改变参数 n 的数值，观察表中 $4\cdot\left(s+\dfrac{(-1)^k}{2\cdot k+1}\right)$ 一列值的变化情况，此列中的值即圆周率的近似值。记录当圆周率的值已精确到小数点后第 5 位，即 3.14159 时参数 n 的取值情况。

3．比较用韦达公式和用级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$ 计算圆周率近似值的优缺点。

4．设计以几何画板为工具利用级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{2k+1}\dfrac{1}{(\sqrt{3})^{2k+1}}$ 计算圆周率近似值的课件。

1.4　蒙特卡罗法

以单位正方形的一个顶点为圆心，以正方形的边长为半径，可在正方形中画出一个扇形，这个扇形恰为单位圆的 $\dfrac{1}{4}$。由于单位正方形的面积是 1，因此，只要能够求出扇形的面积在单位正方形的面积中所占的比例 k，就能求出扇形的面积，从而求得 π 的值。求扇形面积在单位正方形面积中所占比例的一个方法，是在正方形中随机地投入很多点，并使所投的每个点落在正方形中的每一个位置的机会均等；则落在扇形中的点的个数与所投点的总数的比可作为 k 的近似值。这种利用随机数来解决问题的数学方法称为蒙特卡罗法。下面利用蒙特卡罗法计算圆周率。

【实验内容】

利用蒙特卡罗法，通过在正方形中随机投点，计算落入扇形中的点的个数与所投点的总数的比，求出圆周率 π 的近似值。

【实验思路】

以单位正方形的一个顶点为圆心，以正方形的边长为半径，可在正方形中画出一个扇形。利用迭代的方法在正方形中随机地投入很多点，并使所投的每个点落在正方形中的每一个位置的机会均等；则落入扇形中的点的个数与落入正方形中点的总数的比就是圆周率 π 的近似值。

【软件技术要点】

1．符号函数 sgn 的使用。

2．迭代像点【终点】的使用。

【实验设计】

1．单击【编辑】菜单的【参数选项】，弹出参数选项对话框，将“单位”选项卡中“其他（斜率、比……）”的精确度都设为十万分之一。单击【绘图】菜单，定义坐标系，隐藏网格。

2．用画线工具作线段 AB；选定点 A，单击【变换】菜单中的【标记中心】，把点 A 标记为中心，选定点 B 和线段 AB（不选点 A），单击【变换】菜单中的【旋转】，弹出旋转对话框，将旋转参数设为固定角度 90°，单击“旋转”按钮，得旋转像点 B' 和像线段 AB'；选定点 B'，右击弹出点 B' 属性对话框，将点 B' 的标签改为 D；以点 D 为中心，用同样的方法将点 A 和线段 DA（不包括点 D）旋转 90° 得 A' 和线段 DA'，将点 A' 的标签改为 C；用画线工具作线段 BC，正方形 $ABCD$ 绘成。依次选定点 A、点 B、点 D，单击【构造】菜单中的【圆上的弧】，作 $\frac{1}{4}$ 圆的圆弧 ABD（图 1.4-1）。

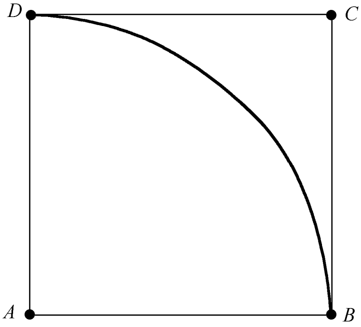


图 1.4-1

3．用画点工具在 AD 上任取点 E，依次选定点 A 和点 E，单击【变换】菜单中的【标记向量】，将 AE 标记为向量；用画点工具在 AB 上任取点 F，选定点 F，单击【变换】菜单中的【平移】，弹出平移对话框，将平移变换设为标记，从点 A 到点 E，单击“平移”按钮，将点 F 按标记的向量平移，得点 G（图 1.4-2）。

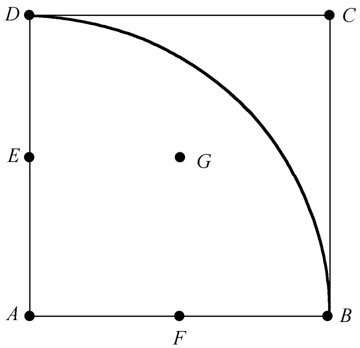


图 1.4-2

4．选定 A、B 两点，单击【度量】菜单中的【距离】，求出 A、B 两点的距离；用同样的方法求出 A、G 两点的距离；选定 A、B 两点的距离值，右击弹出距离度量结果的属性对话框，将 A、B 两点的距离标签改为 r。单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 $\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AG-r)}{2}$，选定 $\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AG-r)}{2}$，右击弹出距离度量结果的属性对话框，将计算量 $\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AG-r)}{2}$ 标签改为 j。

5．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数 $m=0$，新建参数 $n=0$；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 $m+j$。

6．用画点工具在 x 轴上取点 H，选定点 H，单击【度量】菜单中的【横坐标】，求出点 H 的横坐标 x_H；依次选定 x_H 和 $m+j$，单击【绘图】菜单中的【绘制 (x,y)】，以 x_H 为横坐标、以 $m+j$ 为纵坐标绘制点 I。

7．依次选定参数 $m=0$ 及点 E、F、H 和参数 $n=0$，按下 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框，将原像 m 及 E、F、H 的初像依次设为 $m+j$、E、F、I；选择“完整迭代”（图 1.4-3），在【结构】下拉菜单中选择“到所在对象的随机位置”（图 1.4-4），不选择“生成迭代数据表”，进行深度迭代。

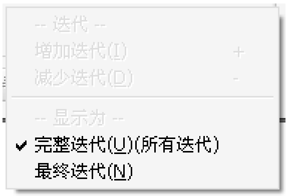


图 1.4-3

8．选定参数 $n=0$，按键盘上的“+”键，参数 n 的数值改变为 $n=1$，选定由点 H 和 I 产生的迭代像点（在点 I 的正上方），单击【变换】菜单中的【终点】，得迭代像点的终点 J；选定点 J，单击【度量】菜单中的【纵坐标】，求点 J 的纵坐标 y_J。

图 1.4-4

9．单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 y_J-j、$\dfrac{y_J-j}{n}$ 和 $4\cdot\dfrac{y_J-j}{n}$。

选定 $y_{\mathrm{J}}-j$，右击弹出快捷菜单，选择属性项，打开度量值的属性对话框，将 $y_{\mathrm{J}}-j$ 的标签改为“落在扇形上的点数”，用同样的方法将 $4\cdot\dfrac{y_{\mathrm{J}}-j}{n}$ 的标签改为“圆周率的近似值”（图 1.4-5）。

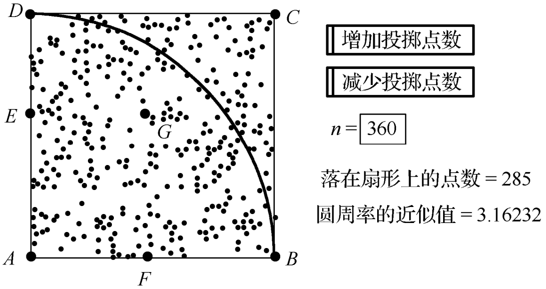


图 1.4-5

10．选定参数 n，单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】/【动画】，弹出操作类按钮运动点的属性对话框，在“动画”选项卡中将方向属性设为“增加”、“只播放一次”，改变数值属性设为“连续”、“以每秒 5.0 单位”，参数 n 的范围设为“0.0 到 4000.0”；标签设为“增加投掷点数”，单击“确定”按钮，得“增加投掷点数”按钮（图 1.4-6）。类似地设置“减少投掷点数”动画按钮。

图 1.4-6

11．将以上制作的课件以“蒙特卡罗方法计算圆周率近似值.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“蒙特卡罗方法计算圆周率近似值.gsp”。

2．单击“增加投掷点数”按钮，观察参数 n（投掷总点数）、“落在扇形上的点数”和“圆周率的近似值”的变化；记录所得“圆周率的近似值”与圆周率 π 误差较小时参数 n、“落在扇形上的点数”和“圆周率的近似值”的 5 组取值情况。

3．观察投掷总点数的变化趋势和“圆周率的近似值”与圆周率 π 误差变化趋势之间的关系，思考为什么会出现这种情况。

【经验点拨】

例中，$\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AG-r)}{2}$ 用来统计落在扇形上的点的个数。迭代时注意在【结构】下拉菜单中选择“到所在对象的随机位置”。实验时若想快速改变参数 n（投掷总点数）的数值，可选定参数 n 后右击弹出快捷菜单，通过编辑参数项改变参数的值。

实验 2　极　　限

极限的思想是近代数学的重要思想，极限概念、极限理论作为微积分的基石，是学习数学分析的基础。而对极限严格定义的理解，又是掌握极限概念和极限理论的关键。

【实验目的】

通过绘制数列 $f(n)$ 、函数 $f(x)$ 的动态图像，观察数列一般项的变化趋势及函数当 $x\to\infty$ 时和当 $x\to a$ 时图像的变化情况，加深对数列极限 $\varepsilon-N$ 定义及函数极限 $\varepsilon-A$ 定义和 $\varepsilon-\delta$ 定义的理解，更好地掌握数列极限和函数极限的概念；掌握利用几何画板坐标系刻度单位可变的特性动态展现图像特征的技巧。

2.1　数 列 极 限

数列极限定义：设有数列 $f(n)$ ， a 是常数。若对任意 $\varepsilon>0$ ，总存在正整数 N ，对于任意正整数 $n>N$ ，有

$$\left|f(n)-a\right|<\varepsilon$$

则称数列 $f(n)$ 的极限是 a 或数列 $f(n)$ 收敛于 a 。

【实验内容】

动态展现数列 $f(n)$ 一般项 a_n 的变化趋势。

当 $f(n)$ 收敛于 a 时，对任意给定的 $\varepsilon>0$ ，确定正整数 N ，使当 $n>N$ 时，总有 $\left|f(n)-a\right|<\varepsilon$ 。当 $f(n)$ 发散时，观察对给定的 $\varepsilon>0$ ，可否确定正整数 N ，使当 $n>N$ 时，有 $\left|f(n)-a\right|<\varepsilon$ 。加深对数列极限 $\varepsilon-N$ 定义的理解。

【实验思路】

以 $f(n)=10\cdot\dfrac{(-1)^n}{n}$ 为例。

在 x 轴上取点 A ，求出点 A 的横坐标 x_{A} ，以 $(x_{\mathrm{A}},f(x_{\mathrm{A}}))$ 为坐标作点 B ；将点 A 平移得点 A' ，求出点 A' 的横坐标 $x_{\mathrm{A}'}$ ，以 $(x_{\mathrm{A}'},f(x_{\mathrm{A}'}))$ 为坐标作点 C ；连接 AB 、 $A'C$ ，以点 A 为原像、点 A' 为初像做深度迭代，即得 $f(n)$ 前 n 项的图像。作两直线 $y=a+\varepsilon$ 和 $y=a-\varepsilon$ 后，可直接观察 ε 和 N 的关系。

【软件技术要点】

1．【深度迭代】的使用。
2．迭代像点【终点】的使用。
3．坐标系中单位点功能的使用。

【实验设计】

1．设置参数。新建画板，单击【编辑】菜单中的【参数选项】，打开参数选项对话框，将单位选项卡中的“其他（斜率、比……）”的精确度设为十万分之一（图 2.1-1）。

图 2.1-1

2．单击【绘图】菜单中的【定义坐标系】，建立坐标系；单击【绘图】菜单中的【隐藏网格】，隐藏坐标系网格。用鼠标将坐标原点拖到屏幕左侧中间位置。

3．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数$n=1$；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，计算$n+1$。单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数$t=3$；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，计算$t-2$。

4．单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，分别计算$10\cdot\dfrac{(-1)^n}{n}$和$10\cdot\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$。

5．用画点工具在x轴上取点A；选定点A，单击【变换】菜单中的【平移】，弹出平移对话框，选择极坐标变换、固定距离 0.2cm、固定角度0.0°，单击“平移”按钮得平移像点A'。选定点A，单击【度量】菜单中的【横坐标】，求出点A的横坐标x_A；用同样的方法求出点A'的横坐标$x_{A'}$。

6．依次选定点A的横坐标x_A和$10\cdot\dfrac{(-1)^n}{n}$，单击【绘图】菜单中的【绘制(x,y)】，以x_A为横坐标、以$10\cdot\dfrac{(-1)^n}{n}$为纵坐标，绘制点B；用同样的方法，以点A'的横坐标$x_{A'}$为横坐标、以

$10\cdot\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ 为纵坐标，绘制点 C。用画线工具画线段 AB 和 $A'C$（图 2.1-2）。

7．依次选定点 A、参数 $n=1$、参数 $t-2$，按下 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框，将原像 A 的初像设为点 A'（图 2.1-3），将原像 n 的初像设为 $n+1$；单击“显示”按钮，在菜单中选择“完整迭代”（在相应项上打钩）（图 2.1-4）；单击“结构”按钮，在菜单中选择“所有对象的像”，不选择“生成迭代数据表”（图 2.1-5）；单击“迭代”按钮，得迭代后的图形（图 2.1-6）。

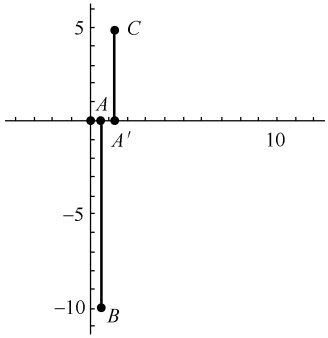


图 2.1-2

图 2.1-3

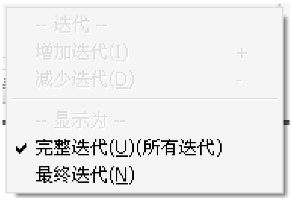


图 2.1-4

图 2.1-5

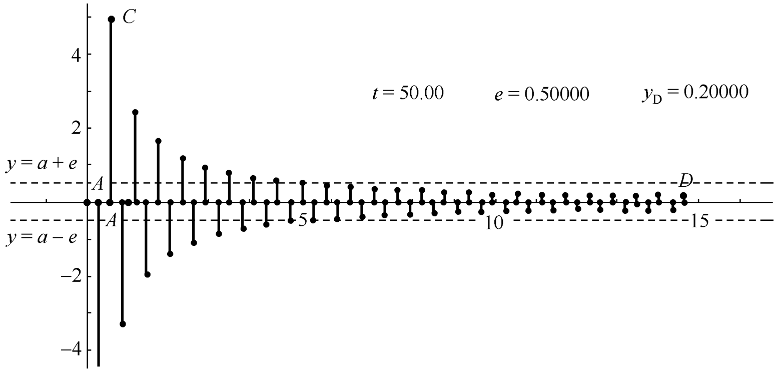


图 2.1-6

8．选定点B、点C的迭代像点，单击【变换】菜单中的【终点】，得迭代像点的终点D。单击【度量】菜单中的【纵坐标】，求出点D的纵坐标y_{D}，y_{D}就是$f(n)=10\cdot\dfrac{(-1)^n}{n}$的第$t$项的值。

9．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数$d=2$；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，计算$\dfrac{1}{d}$。选定计算量$\dfrac{1}{d}$，右击弹出度量结果属性对话框，在“标签”选项卡的文本框中输入e，将计算量$\dfrac{1}{d}$的标签改为e。单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数$a=0$。

10．单击【绘图】菜单中的【绘制新函数】，弹出新建函数对话框，输入$a+e$，绘制直线$y=a+e$的图像；用同样的方法绘制直线$y=a-e$的图像。这里，e是数列极限定义中的正数ε，t是图中所显示的数列$f(n)$的项数，y_{D}是图中所显示的数列$f(n)$的序号最大项的值。

11．将以上制作的课件以“数列极限.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“数列极限.gsp”。

2．通过改变e的取值，观察e与N的关系，是否对任意给定的e的取值，都可以确定一个正整数N，使得当$n>N$时，就有$\left|f(n)-a\right|<e$。

3．对$e=0.50000$、$e=0.12500$，分别确定正整数N，使得当$n>N$时，就有$\left|f(n)-a\right|<e$，并记录。

4．将数列$f(n)=10\cdot\dfrac{(-1)^n}{n}$的通项改为$f(n)=10\cdot\dfrac{(-1)^n(n-1)}{n}$，观察此数列是否对任意给定的$e$的取值，都可以确定一个正整数$N$，使得当$n>N$时，就有$\left|f(n)-a\right|<e$的情况。并对两数列$f(n)=10\cdot\dfrac{(-1)^n}{n}$和$f(n)=10\cdot\dfrac{(-1)^n(n-1)}{n}$的敛散性进行比较。

【经验点拨】

课件运行时，改变参数t的数值可增加或减少所显示的$f(n)$图像的项数；增大或减小参数d的数值可改变e的取值；用鼠标将坐标系的单位点向右拉动可把刻度单位动态放大。必要时可把刻度单位放得很大，以揭示e很小时满足$\left|f(n)-a\right|<e$的e与N的关系。刻度单位可以动态放大，正是几何画板软件奇妙的地方。

2.2　自变量趋向∞的函数极限

当$x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限的定义：设函数$f(x)$在区间$\left\{x \middle| |x|>a\right\}$有定义，$b$是常数。

若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A>0$，$\forall x$：$|x|>A(>a)$，有

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

则称函数 $f(x)$（当 $x\to\infty$ 时）存在极限，极限是 b。

【实验内容】

绘制函数 $f(x)$ 的图像，利用几何画板软件坐标系中刻度单位可以动态放大的特点，观察对任意给定的 $\varepsilon>0$，是否存在 $A>0$，使对任意 x，当 $x>A$（$>a$）时，就有 $|f(x)-b|<\varepsilon$，从而加深对函数极限 $\varepsilon-A$ 定义的理解。

【实验思路】

以函数 $f(x)=\dfrac{5}{x^2+1}\cdot\sin(5x)$ 为例。

在坐标系中作函数 $f(x)=\dfrac{5}{x^2+1}\cdot\sin(5x)$ 的图像及两条直线 $y=b+e$ 和 $y=b-e$，通过改变 e 的大小和移动单位点动态改变坐标系的刻度单位，观察函数 $f(x)$ 的图像和两直线 $y=b+e$、$y=b-e$ 的关系，并确定 A。

【实验设计】

1．设置参数。新建画板，单击【编辑】菜单中的【参数选项】，打开参数选项对话框，将“单位”选项卡中的“角度”设为弧度，“其他（斜率、比……）”的精确度设为十万分之一（图 2.2-1）。

图 2.2-1

2．单击【绘图】菜单中的【定义坐标系】，建立坐标系；单击【绘图】菜单中的【隐藏网格】，隐藏坐标系网格。用鼠标将坐标原点拖到屏幕左侧中间位置。

3．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数 $d=1$；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，计算 $\dfrac{1}{d}$。选定计算量 $\dfrac{1}{d}$，右击弹出快捷菜单选属性项，打开度量值 $\dfrac{1}{d}$ 属性对话框，选标签选项，将 $\dfrac{1}{d}$ 的标签改为 e。

4．单击【绘图】菜单中的【绘制新函数】，弹出新建函数对话框，按“方程（Q）”打开下拉列表，确认方程的形式为 $y=f(x)$。在输入框中输入“$(5/(x\wedge2+1))*\sin(5\cdot x)$”（其中正弦函数符号通过函数下拉列表中选用），单击“确定”按钮即得函数 $f(x)=\dfrac{5}{x^2+1}\cdot\sin(5x)$ 的图像（图 2.2-2）。

5．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数 $b=0$；单击【绘图】菜单中的【绘制新函数】，弹出新建函数对话框，输入 $b+e$，绘制直线 $y=b+e$ 的图像；用同样的方法绘制直线 $y=b-e$ 的图像（图 2.2-3）。

6．将以上制作的课件以“自变量趋向无穷的函数极限.gsp”保存。

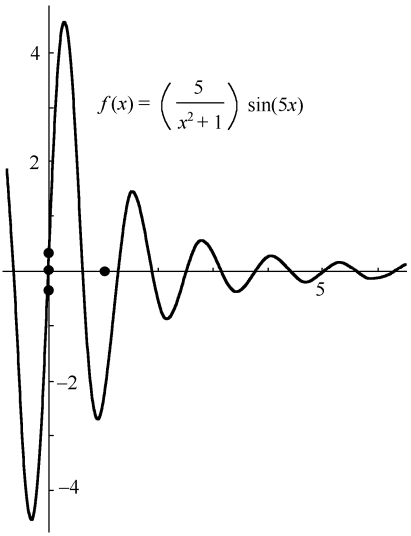


图 2.2-2

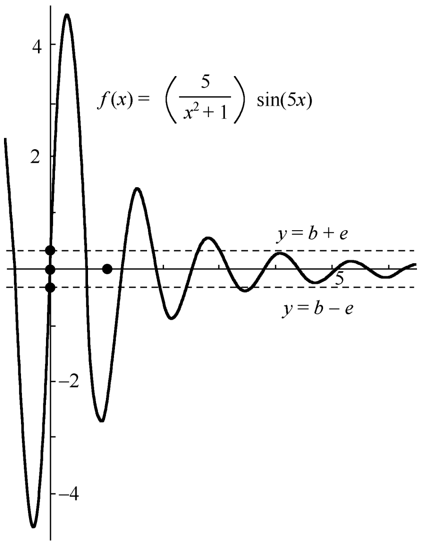


图 2.2-3

【实验要求】

1．运行课件“自变量趋向无穷的函数极限.gsp”。

2．通过改变 e 的取值，观察是否无论 e 的值多小，都可以在 x 轴找到一个点，此点右方的函数图像全部位于两条平行线 $y=b+e$、$y=b-e$ 之间。也即对任意给定的 e 的取值，都存在 $A>0$，使对任意 x，当 $x>A$（$>a$）时，就有 $|f(x)-b|<\varepsilon$。

3．对 $e=0.25000$、$e=0.06250$，分别确定 $A>0$，使对任意 x，当 $x>A$（$>a$）时，就有 $|f(x)-b|<\varepsilon$，并记录。

【经验点拨】

以上制作的课件，当参数d的值逐渐增大时，e的值随之减小，两条平行直线$y=b+e$、$y=b-e$的距离也随之减小。当直线$y=b+e$、$y=b-e$的距离很小时，可以用鼠标左键按住坐标系的单位点$(1,0)$往右移动，将坐标系的单位刻度放大，配合窗口下方水平滑块的左右移动，可以观察到：无论e的值多小，都可以在x轴找到一个点，此点右方的函数图像全部位于两条平行线$y=b+e$、$y=b-e$之间。这表明：对$\forall\varepsilon>0$，$\exists A>0$，使得$\forall x$：$|x|>A$（$>a$），都有$|f(x)-b|<\varepsilon$。

2.3　自变量趋向 *a* 的函数极限

当$x\to a$时，函数$f(x)$的极限的定义：设函数$f(x)$在邻域$\overset{\circ}{\bigcup}(a)$有定义，$b$是常数。若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$0<|x-a|<\delta(x\in\overset{\circ}{\bigcup}(a,\delta))$，有

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

则称函数$f(x)$（当$x\to a$时）存在极限，极限是b。

【实验内容 1】

通过割线的极限位置求抛物线$y=2x^2$上一点$P(1,2)$的切线方程，观察验证“当x无限趋于 1 时，函数$\dfrac{2x^2-2}{x-1}$无限趋近于 4”的事实。

【实验思路】

在坐标系中作函数$y=2x^2$的图像和点$P(1,2)$，在$y=2x^2$的图像上取点$Q(x,2x^2)$，求出割线PQ的斜率$\dfrac{2x^2-2}{x-1}$。通过移动Q点验证“当x无限趋于 1 时，函数$\dfrac{2x^2-2}{x-1}$无限趋近于 4”的事实。

【实验设计】

1．设置参数。新建画板，单击【编辑】菜单中的【参数选项】，打开参数选项对话框，将“单位”选项卡中的“其他（斜率、比……）”的精确度设为十万分之一。

2．单击【绘图】菜单中的【定义坐标系】，建立坐标系；单击【绘图】菜单中的【隐藏网格】，隐藏坐标系网格。用鼠标将坐标原点拖到屏幕中间偏下的位置。

3．单击【绘图】菜单中的【绘制新函数】，弹出新建函数对话框，按“方程（Q）”打开

下拉列表，确认方程的形式为 $y = f(x)$。在输入框中输入“$2*x\wedge 2$”，单击“确定”按钮即得函数 $f(x) = 2x^2$ 的图像（图 2.3-1）。

4．单击【绘图】菜单中的【绘制点】，弹出绘制点对话框（图 2.3-2），在绘制参数中选择直角坐标（R），在点坐标输入框中依次输入 1、2，单击“绘制”按钮绘制点 $(1, 2)$，用文本工具将该点标记为 P。

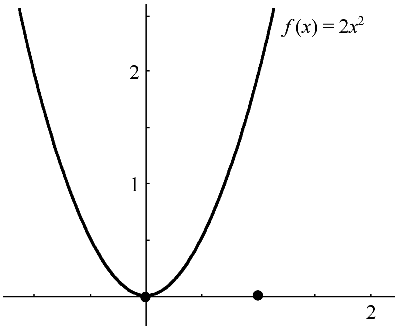


图 2.3-1

图 2.3-2

5．用画点工具在函数 $f(x) = 2x^2$ 的图像上取点 Q。选定点 P、Q 两点的状态下单击【构造】菜单中的【直线】，作经过 P、Q 两点的直线，即割线 PQ（图 2.3-3）。

6．在选定点 Q 的状态下单击【度量】菜单中的【横坐标】，求出点 Q 的横坐标 x_Q。单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，计算 $|x_Q - 1|$ 的值；再单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，计算 $\dfrac{2x_Q^2 - 2}{x_Q - 1}$ 的值，显然 $\dfrac{2x_Q^2 - 2}{x_Q - 1}$ 就是割线 PQ 的斜率（可以选定割线 PQ 后单击【度量】菜单中的【斜率】，求出割线 PQ 的斜率与此值比较）。

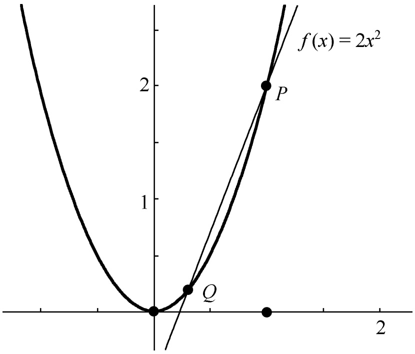


图 2.3-3

7．单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，计算 $\left|\dfrac{2x_Q^2 - 2}{x_Q - 1} - 4\right|$。由解析几何的

知识易知经过 $f(x)=2x^2$ 上点 P 的切线的斜率为 $k=4$，因此 $\left|\dfrac{2x_Q^2-2}{x_Q-1}-4\right|$ 就是割线 PQ 的斜率与过点 P 的切线斜率的误差（图 2.3-4）。

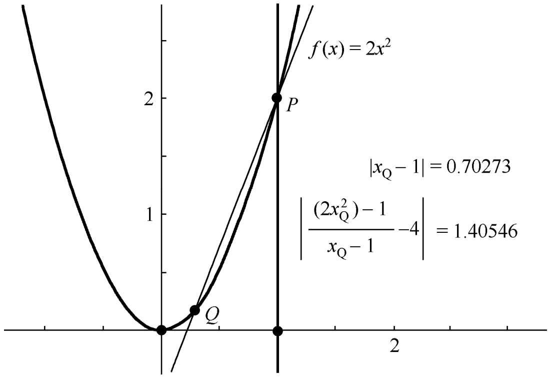


图 2.3-4

8．将以上制作的课件以“自变量趋向 a 的函数极限.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“自变量趋向 a 的函数极限 1.gsp”。

2．用鼠标拖动点 Q 沿抛物线 $f(x)=2x^2$ 逐渐趋近点 P，观察并记录 $|x_Q-1|$ 和 $\left|\dfrac{2x_Q^2-2}{x_Q-1}-4\right|$ 两个计算量取值的变化情况，通过记录的数据找出 $|x_Q-1|$ 和 $\left|\dfrac{2x_Q^2-2}{x_Q-1}-4\right|$ 两个计算量之间的关系。

3．若令 $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$，$a=1$，$b=4$，对任意给定的 $\varepsilon>0$，找出 $\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-b|<\varepsilon$。记录三组符合上述要求的 ε 和 δ（最大）的值。

【经验点拨】

以上制作的课件，当点 Q 沿抛物线 $f(x)=2x^2$ 逐渐趋近点 P 时，割线 PQ 的斜率逐渐趋近过点 P 的切线的斜率；当点 Q 无限趋近点 P 时，在极限的位置割线 PQ 变成了过点 P 的切线，割线 PQ 的斜率 $\dfrac{2x_Q^2-2}{x_Q-1}$ 无限趋近过点 P 的切线的斜率 $k=4$。

课件反映了“当x无限趋于1时，函数$\dfrac{2x^2-2}{x-1}$无限趋近于4”的事实。通过移动点Q观察$|x_Q-1|$和$\left|\dfrac{2x_Q^2-2}{x_Q-1}-4\right|$两个计算量，不难发现：$|x_Q-1|$的值总是$\left|\dfrac{2x_Q^2-2}{x_Q-1}-4\right|$的值的二分之一。因此，若令$\left|\dfrac{2x_Q^2-2}{x_Q-1}-4\right|=\varepsilon$，则只需取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，即有$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，$\forall x$：$0<|x-1|<\delta$，有$\left|\dfrac{2x^2-2}{x-1}-4\right|<\varepsilon$。这就是“当$x$无限趋于1时，函数$\dfrac{2x^2-2}{x-1}$无限趋近于4”的定量叙述。

【实验内容2】

绘制函数$f(x)$的图像，利用几何画板软件坐标系中刻度单位可以动态放大的特点，观察对任意给定的$\varepsilon>0$，是否存在$\delta>0$，使对任意$x\in\overset{\circ}{\bigcup}(a,\delta)$，当$0<|x-a|<\delta$时，都有$|f(x)-b|<\varepsilon$，从而加深对函数极限$\varepsilon-\delta$定义的理解。以函数$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$为例。

【实验思路】

在坐标系中作函数$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$及两直线$y=\dfrac{1}{2}+\varepsilon$和$y=\dfrac{1}{2}-\varepsilon$的图像，通过改变$\varepsilon$的大小和移动单位点动态改变坐标系的刻度单位，观察函数$f(x)$的图像和两条直线$y=\dfrac{1}{2}+\varepsilon$、$y=\dfrac{1}{2}-\varepsilon$的关系，并确定$\delta$。

【实验设计】

1．设置参数。新建画板，单击【编辑】菜单中的【参数选项】，打开参数选项对话框，将“单位”选项卡中的“其他（斜率、比……）”的精确度设为十万分之一。

2．单击【绘图】菜单中的【定义坐标系】，建立坐标系；单击【绘图】菜单中的【隐藏网格】，隐藏坐标系网格。用鼠标将坐标原点拖到屏幕左侧偏下的位置。

3．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数$m=1$；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，计算$\dfrac{1}{m}$。选定计算量$\dfrac{1}{m}$，右击弹出快捷菜单选属性项，打开度量值$\dfrac{1}{m}$属性对话框，选标签选项，将$\dfrac{1}{m}$的标签改为e。

4．单击【绘图】菜单中的【绘制新函数】，弹出新建函数对话框，按“方程（Q）”打开

下拉列表，确认方程的形式为 $y=f(x)$ 。在输入框中输入“ $(x-1)/(x\text{^}2-1)$ ”，单击“确定”按钮即得函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的图像（图 2.3-5，图中只显示 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 一个分支的图像）。

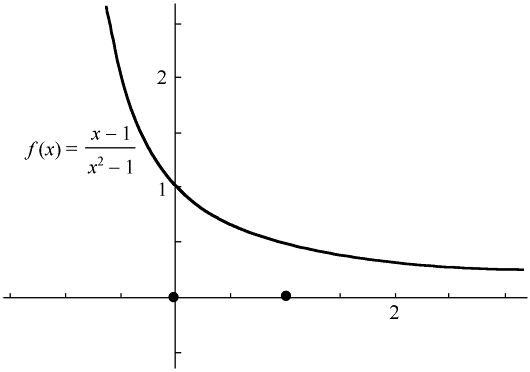


图 2.3-5

5．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数 $b=0.5$；单击【绘图】菜单中的【绘制新函数】，弹出新建函数对话框，按“方程（Q）”打开下拉列表，确认方程的形式为 $y=f(x)$ 。在输入框中输入 $b+e$ ，绘制直线 $y=b+e$；将鼠标光标移到直线 $y=b+e$ 上，右击弹出快捷菜单，通过颜色选项选择深绿色块，将直线 $y=b+e$ 设为深绿色。用同样的方法绘制直线 $y=b-e$ 。

6．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数 $n=1$，单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，计算 $\dfrac{1}{n}$ 。选定计算量 $\dfrac{1}{n}$，右击弹出快捷菜单选属性项，打开度量值 $\dfrac{1}{n}$ 属性对话框，选标签选项，将 $\dfrac{1}{n}$ 的标签改为 d 。

7．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数 $a=1$；单击【绘图】菜单中的【绘制新函数】，弹出新建函数对话框，按“方程（Q）”打开下拉列表，确认方程的形式为 $x=f(y)$，在输入框中输入 $a-d$ ，绘制直线 $x=a-d$ ；将鼠标光标移到直线 $x=a-d$ 上，右击弹出快捷菜单，通过颜色选项选择浅绿色块，将直线 $x=a-d$ 设为浅绿色。用同样的方法绘制直线 $x=a+d$ （图 2.3-6）。

8．选定参数 m ，右击弹出快捷菜单，选择属性打开属性对话框，在“动画参数”选项卡中将“键盘调节”设置为“改变以 0.1 单位”；对参数 n 进行相同的设置。

9．将以上制作的课件以“自变量趋向 a 的函数极限 2.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“自变量趋向 a 的函数极限 2.gsp”。

2．通过参数 m 的增减改变 e 的取值，观察（必要时可以用鼠标左键按住坐标系的单位点 $(1,0)$ 往右移动，将坐标系的单位刻度放大，配合窗口下方水平滑块的左右移动）是否无论 e 的

值多小，都可以确定计算量 d 的一个取值，使得区间 $(a-d,a+d)$ 内的函数图像全部位于两条平行线 $y=b+e$、 $y=b-e$ 之间。

3．对 $e=0.25000$ 、 $e=0.06250$ 、 $e=0.03125$ ，分别确定计算量 d 的取值，使得区间 $(a-d,a+d)$ 内的函数图像全部位于两条平行线 $y=b+e$、 $y=b-e$ 之间，并记录。

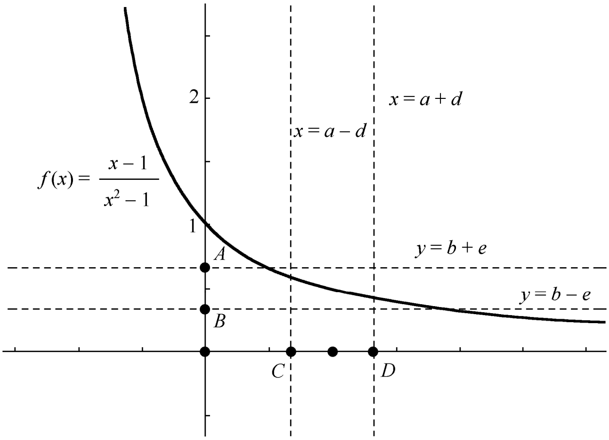


图 2.3-6

【经验点拨】

以上制作的课件，当参数 m 的值逐渐增大时， e 的值随之减小，两条平行直线 $y=b+e$、 $y=b-e$ 的距离也随之减小。当直线 $y=b+e$、 $y=b-e$ 的距离很小时，通过用鼠标左键按住坐标系的单位点 $(1,0)$ 往右移动，将坐标系的单位刻度放大，配合窗口下方水平滑块的左右移动，可以观察到：无论 e 的值多小，都可以通过增大 n 来确定 d 一个值，使区间 $(a-d,a+d)$ 内的函数图像全部位于两条平行线 $y=b+e$、$y=b-e$ 之间。这表明：对 $\forall\varepsilon=e>0$，$\exists\delta=d>0$，使对任意 $x\in\overset{\circ}{\bigcup}(a,\delta)$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，都有 $\left|\dfrac{x-1}{x^2-1}-0.5\right|<\varepsilon$ 。

实验 3　迭代法求方程的近似解

当 $f(x)$ 是超越函数或高次多项式时，$f(x)=0$ 称为非线性方程，此类方程除少数情形外，只能求近似解。求解的一种方法是从一个初始近似解出发，重复某种计算过程来不断改进近似解，期望在有限次改进后，能计算出一个满足误差要求的近似值。这种求解方法称为迭代法。常用的迭代法包括简单迭代法、牛顿切线法等。

【实验目的】

了解利用简单迭代法求方程近似解的方法，了解牛顿切线法的原理及其几何意义，掌握牛顿切线法求方程近似解及利用几何画板实施牛顿切线法的技巧，观察迭代初始值对牛顿迭代收敛性的影响。

3.1　简单迭代法求方程的近似解

为求给定方程 $f(x)=0$ 的近似解 x^*，先将 $f(x)=0$ 转化为等价方程 $x=g(x)$，函数 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的定义域可能不相同，但要求它在所求 $f(x)=0$ 的解 x^* 邻域附近有定义。

设 x_0 是 $f(x)=0$ 的一个近似解，构造一个序列

$$x_{k+1}=g(x_k) \quad k=0,1,\cdots$$

如果每个 x_k 都在 $g(x)$ 的定义域上，并保持有界且收敛到 x^*，则 $x=x^*$ 就是 $f(x)=0$ 的最好的近似解。

以上这种方法称为简单迭代法或单点迭代法。

【实验内容】

将几何画板的迭代功能应用于简单迭代法，求给定方程 $f(x)=0$ 的近似解。观察迭代过程，分析迭代像点分布趋势与 x_k 的收敛情况。

以 $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ 为例（此方程在[1, 2]中有唯一根）。

【实验思路】

由于求等价方程 $x=g(x)$ 的解，也就是求方程组 $y=x$ 、$y=g(x)$ 的解，其几何意义就是求直线 $y=x$ 和曲线 $y=g(x)$ 的交点的横坐标。因此，将方程 $f(x)=0$ 化成等价方程 $x=g(x)$ 。在坐标系中绘出曲线 $y=g(x)$ 和直线 $y=x$ 的图像，在 x 轴上取点 A ，求出点 A 的横坐标 x_{A} ，以 $(x_{\mathrm{A}},g(x_{\mathrm{A}}))$ 为坐标在曲线 $y=g(x)$ 上作点 B 。过点 B 作平行于 x 轴的直线交直线 $y=x$ 于点

C，过点C作平行于y轴的直线交x轴于点D，再以$(x_D, g(x_D))$为坐标作曲线$y = g(x)$上的点E。以点A为原像点D为初像做深度迭代，若x_k收敛，则迭代像点逐渐趋于同一点。随着迭代次数的增加，可得到近似程度越来越好的解。

【软件技术要点】

1．【深度迭代】的使用。

2．迭代像点【终点】的使用。

【实验设计】

1．将$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$化成等价方程：$x = g(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$。

2．设置参数。新建画板，单击【编辑】菜单中的【参数选项】，打开参数选项对话框，将“单位”选项卡中的“其他（斜率、比……）”的精确度设为十万分之一（图3.1-1）。

图3.1-1

3．单击【绘图】菜单中的【定义坐标系】，建立坐标系；单击【绘图】菜单中的【隐藏网格】，隐藏坐标系网格。

4．单击【绘图】菜单中的【绘制新函数】，弹出新建函数对话框，按“方程（Q）”打开下拉列表，确认方程的形式为$y = f(x)$。在输入框中输入“$x \wedge 3 + 4 * x \wedge 2 - 10$”，单击“确定”按钮绘制函数$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$的图像（图3.1-2）。

5．单击【数据】菜单中的【新建函数】，弹出新建函数对话框，按“方程（Q）”打开下拉列表，确认方程的形式为$y = f(x)$。在输入框中输入“$(1/2)*(10 - x \wedge 3) \wedge (1/2)$”，单击“确定”按钮即得新建函数$g(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$。

6．选定函数 $g(x)=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$，单击【绘图】菜单中的【绘制函数】，绘制函数 $g(x)=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$ 的图像。单击【绘图】菜单中的【绘制新函数】，在弹出的对话框中输入“x”，绘制直线 $y=x$ 的图像（图 3.1-3）。

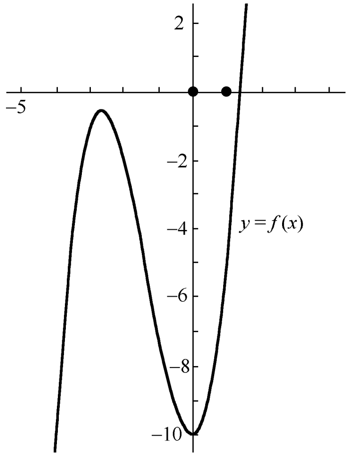


图 3.1-2

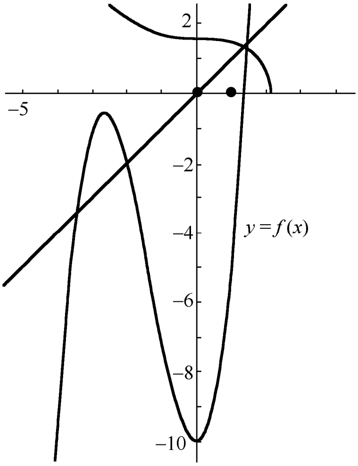


图 3.1-3

7．用画点工具在 x 轴上（靠近有根区间处，如果已知的话）取点 A，单击【度量】菜单中的【横坐标】，求出点 A 的横坐标 x_A。单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，依次单击 $g(x)=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$ 和 x_A，计算 $g(x_A)$。依次选定 x_A 和 $g(x_A)$，单击【绘图】菜单中的【绘制 (x,y)】，以 x_A 为横坐标、$g(x_A)$ 为纵坐标，绘制曲线 $y=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$ 上的点 B。

8．选定点 B 和 x 轴，单击【构造】菜单中的【平行线】，过点 B 作平行于 x 轴的直线 j 交直线 $y=x$ 于点 C，类似地过点 C 作平行于 y 轴的直线 k 交 x 轴于点 D。选定点 D，单击【度量】菜单中的【横坐标】，求出点 D 的横坐标 x_D。单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，依次单击 $g(x)=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$ 和 x_D，计算 $g(x_D)$；依次选定 x_D 和 $g(x_D)$，单击【绘图】菜单中的【绘制 (x,y)】，以 $(x_D,g(x_D))$ 为坐标绘制曲线 $y=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$ 上的点 E。隐藏两条直线 j、k，作线段 BC 和线段 CE（图 3.1-4）。

9．单击【数据】菜单中的【新建参数】，弹出新建参数对话框，将名称设为 n、值设为 1，单击“确定”按钮，新建参数 $n=1$。

10．用选择工具选定点 A 和参数 n，按下 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框，迭代对话框中迭代的原像为 A，将初像设为点 D；单击“显示”按钮，在

菜单中选择“完整迭代”（在相应项上打钩）；单击“结构”按钮，在菜单中选择“所有对象的像”，不选择“生成迭代数据表”；单击“迭代”按钮得迭代像点（图 3.1-5）。

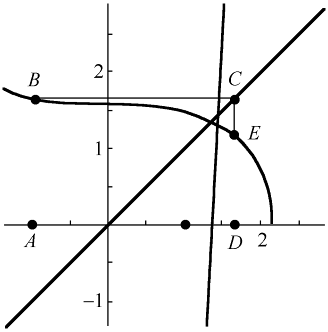


图 3.1-4

图 3.1-5

11．选定曲线 $y=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$ 上的迭代像点，单击【变换】菜单中的【终点】，得迭代像点的终点 F 。求出点 F 的横坐标 x_F ，当曲线 $y=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$ 上的迭代像点趋于一点时， x_F 就是 $f(x)=0$ 的近似根（图 3.1-6）。

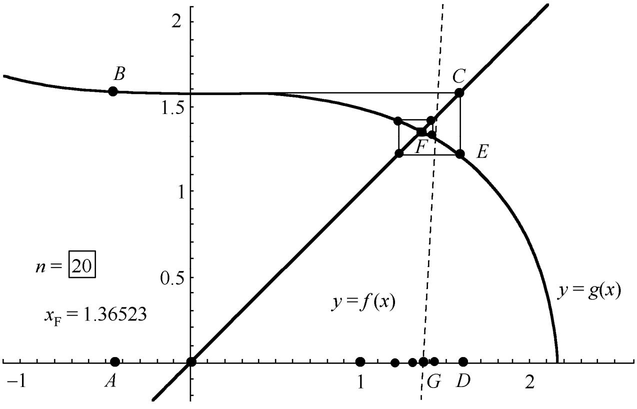


图 3.1-6

12．将以上制作的课件以“简单迭代法求方程的近似解.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“简单迭代法求方程的近似解.gsp”。

2．观察曲线上的迭代像点是否逐渐趋于同一点。若迭代像点逐渐趋于同一点，则迭代像点的终点 F 的横坐标 x_F 的值逐渐趋于同一个数值，验证这个值就是方程 $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ 的近似解。记录此近似解和初始解的数值及迭代次数。

3．选定 $g(x)=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$，右击弹出编辑函数对话框，将 $g(x)$ 修改为其他等价方程，如 $g_1(x)=\left(\frac{10}{x}-4x\right)^{\frac{1}{2}}$、$g_2(x)=\left(\frac{10}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$ 等，再试行求解，并记录对应的初始解、近似解的数值及迭代次数。

【经验点拨】

增大参数 n 的值，可得到更多的迭代像点；移动点 A 的位置，会影响迭代像点的分布和趋势。如果迭代像点逐渐趋于同一点，此时迭代像点的终点 F 的横坐标 x_{F} 的值逐渐趋于同一个数值，那么这个值就是方程 $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ 的近似解（这可通过此值与 $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ 和 x 轴交点 G 横坐标值的比较知道）。如果迭代像点发散，此时 x_{F} 的值无法趋于同一个数值，则表明或者是所用的等价方程无法求得方程 $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ 的近似解，或者是点 A 的位置不适当，此时可调整点 A 的位置并观察迭代像点的变化情况。

3.2 牛顿切线法求方程的近似解

牛顿切线法表述如下：设 x_0 是方程 $f(x)=0$ 的某一近似根。过曲线上点 $P(x_0,y_0)$ 作切线，与 x 轴交于点 Q，则切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，若以 $y=0$ 代入，得 Q 点的横坐标为 $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，则 x_1 是一个比 x_0 较好的近似根。如此进行下去，可得到方程 $f(x)=0$ 的一系列近似根 $x_2,\cdots,x_n$。一般地，有 $x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$。

【实验内容】

将几何画板的迭代功能应用于牛顿切线法，求给定方程 $f(x)=0$ 的近似解。观察迭代过程，了解牛顿切线法的原理及其几何意义；观察迭代初始值对牛顿迭代收敛性的影响。

【实验思路】

在坐标系中绘出 $f(x)=0$ 的图像，在 x 轴上取点 A，求出点 A 的横坐标 x_{A}，过点 $(x_{\mathrm{A}},f(x_{\mathrm{A}}))$ 作曲线 $f(x)=0$ 的切线，求出切线与 x 轴的交点 C，则点 C 的横坐标 x_{C} 是 $f(x)=0$ 的一个比 x_{A} 较好的近似解。以点 A 为原像点 C 为初像做迭代，随着迭代次数的增加，可得到近似程度越来越好的解。

【软件技术要点】

1．【导数】功能的使用。

2．【深度迭代】的使用。

3．迭代像点【终点】的使用。

【实验设计】

以求解方程 $f(x)=\ln(x+2)-\sqrt{x^2+x+1}+x-\dfrac{1}{2}=0$ 的近似解为例。

1．设置参数。新建画板，单击【编辑】菜单中的【参数选项】，打开参数选项对话框，将“单位”选项卡中的“其他（斜率、比……）”的精确度设为十万分之一（图 3.2-1）。

图 3.2-1

2．单击【绘图】菜单中的【定义坐标系】，建立坐标系；单击【绘图】菜单中的【隐藏网格】，隐藏坐标系网格。

3．单击【绘图】菜单中的【新建函数】，弹出新建函数对话框，新建函数 $f(x)=\ln(x+2)-\sqrt{x^2+x+1}+x-\dfrac{1}{2}$；单击【绘图】菜单中的【绘制函数】，绘制函数 $f(x)$ 的图像。

4．用画点工具在 x 轴上取点 A，依次单击【度量】菜单中的【横坐标】和【纵坐标】，求出点 A 的横坐标 x_{A} 及纵坐标 y_{A}；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，依次单击 $f(x)=\ln(x+2)-\sqrt{x^2+x+1}+x-\dfrac{1}{2}$ 和 x_{A}，计算 $f(x_{\mathrm{A}})$；依次选定 x_{A} 和 $f(x_{\mathrm{A}})$，单击【绘图】菜单中的【绘制点 (x,y)】（图 3.2-2），以 x_{A} 为横坐标、$f(x_{\mathrm{A}})$ 为纵坐标，绘制出曲线 $f(x)$ 上的一点 B（图 3.2-3）。

5．选定 $f(x)=\ln(x+2)-\sqrt{x^2+x+1}+x-\dfrac{1}{2}$，使用【数据】菜单中的【创建导函数】功能，求出 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$。

图 3.2-2

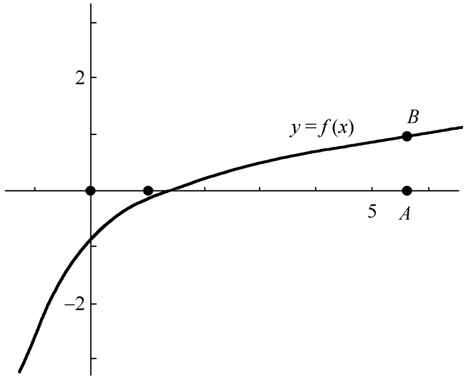


图 3.2-3

6．单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，计算 $f'(x_A)$ 及 $x_A-\dfrac{f(x_A)}{f'(x_A)}$；依次选定 $x_A-\dfrac{f(x_A)}{f'(x_A)}$ 和 y_A，单击【绘图】菜单中的【绘制 (x,y)】，以 $x_A-\dfrac{f(x_A)}{f'(x_A)}$ 为横坐标，以 y_A 为纵坐标，绘制点 C。求出点 C 的横坐标 x_C，单击【数据】菜单中的【计算】，弹出计算对话框，计算 $f(x_C)$；依次选定 x_C 和 $f(x_C)$，单击【组图】菜单中的【绘制点 (x,y)】，以 x_C 为横坐标，以 $f(x_C)$ 为纵坐标，绘制曲线 $f(x)$ 上的点 D。

7．用画线工具作线段 AB、CD 及 BC，BC 就是以点 B 为切点的曲线 $f(x)$ 的切线（图 3.2-4）。

8．单击【数据】菜单的【新建参数】弹出新建参数对话框，将名称设为 n、值设为 3、单位选择“无”，单击“确定”按钮，新建参数 $n=3$。

9．用选择工具选定点 A 和参数 n，按下 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框，迭代对话框中迭代的原像为 A，将初像设为点 C（图 3.2-5）；单击【显示】按钮，在菜单中选择“完整迭代”（在相应项上打钩），单击“结构”按钮，在菜单中选择“所有对象的像”，不选“生成迭代数据表”；单击“迭代”按钮得迭代后的图形（图 3.2-6）。

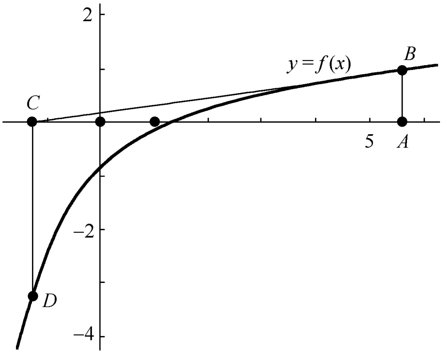


图 3.2-4

图 3.2-5

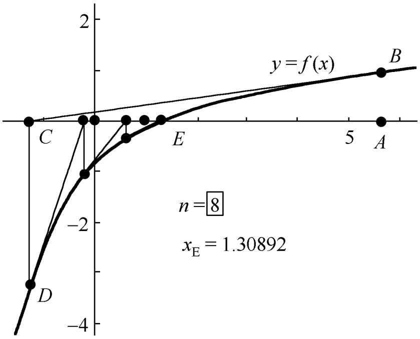


图 3.2-6

10．选定曲线 $y = f(x)$ 上的迭代像点，单击【变换】菜单中的【终点】，得迭代像点的终点 E。求出点 E 的横坐标 x_E，x_E 就是 $f(x) = 0$ 的近似根。

11．将以上制作的课件以“牛顿切线法求方程的近似解.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“牛顿切线法求方程的近似解.gsp”。

2．观察迭代像点是否逐渐趋于同一点。若迭代像点逐渐趋于同一点，表明方程有近似解；随着迭代次数的增加，x_E 逐渐趋于同一数值，这个值就是方程 $f(x) = \ln(x+2) - \sqrt{x^2+x+1} + x - \frac{1}{2} = 0$ 的近似解。对不同的迭代次数和初始解，记录三组迭代次数、初始解和近似解的数值，并指明方程的最好近似解。

3．通过移动点 A 的位置，观察初始解（点 A 的横坐标）对求解方程近似解的影响，确定并记录本实验中无法求出近似解的初始解取值区间。

4．利用此课件求方程 $x^3 + x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$ 的近似解。

5．利用简单迭代法求方程 $f(x) = \ln(x+2) - \sqrt{x^2+x+1} + x - \frac{1}{2} = 0$ 的近似解。

【经验点拨】

图 3.2-7 直观地反映牛顿切线法的解法和近似解的结果，图中绘制了 $f(x) = \ln(x+1) - \sqrt{x^2+2x+1} + x$ 的图像，当然也就可以直观地看到方程是有解的。事实上，即使不绘制 $f(x)$ 的图像，依然可以很容易地判断方程是否有近似解。只要拖动点 A，即可见 $f(x_A)$ 的值随之做相应的变化；由于当 $x_A < 1$ 时，$f(x_A) < 0$，当 $x_A > 2$ 时，$f(x_A) > 0$；因此方程在区间 $[1, 2]$ 上有近似解。注意到当点 A 在闭区间 $[0, 4]$ 上变化时，点 E 的横坐标 x_E 的值始终稳定在 $x_E = 1.71828$ 上（图 3.2-7 和图 3.2-8），由此可知，$x_E = 1.71828$ 便是 $f(x) = \ln(x+1) - \sqrt{x^2+2x+1} + x$ 的最好的近似根。

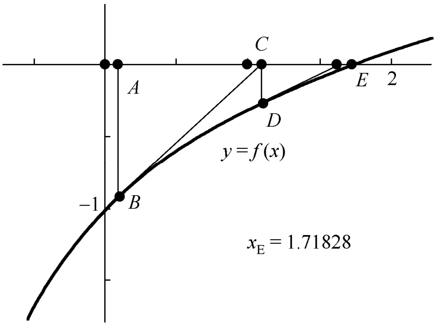


图 3.2-7

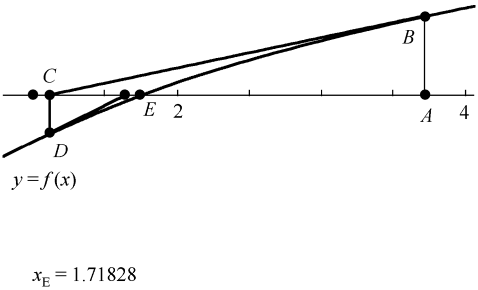


图 3.2-8

实验 4　函数级数图像

函数级数是表示函数，特别是表示非初等函数的一个重要数学工具，在自然科学、工程技术领域和数学本身都有广泛的应用。“一致收敛”是函数级数的一个概念，通过函数级数的动态图像，了解函数级数一致收敛于其和函数的几何意义，有助于更好地掌握级数的学习内容。

【实验目的】

通过绘制函数级数和幂级数的动态图像，直观地反映函数级数一致收敛于其和函数的几何意义，反映 $f(x)$ 及其麦克劳林展开式的近似的程度。使读者更好地理解函数级数一致收敛的概念，理解掌握将非初等函数“展成”幂级数的思想方法；掌握利用几何画板迭代像点的终点作轨迹，绘制函数级数图像的技巧。

4.1　函数级数图像的绘制

【实验内容】

利用几何画板的迭代功能，绘制函数级数的图像；观察当 n 增大时图像形状的变化趋势。以函数级数 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ 为例。

【实验思路】

通过几何画板的迭代功能，构建级数 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$，并利用迭代像点的终点作轨迹，绘制 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ 的图像。

【软件技术要点】

1．参数选项的设置。

2．深度迭代。

3．迭代像点的终点。

【实验设计】

1．设置参数。新建画板，单击【编辑】菜单中的【参数选项】，打开参数选项对话框，将“单位”选项卡中的角度单位设为弧度，精确度设为十万分之一（图 4.1-1）。

2．单击【绘图】菜单中的【定义坐标系】，建立坐标系，单击【绘图】菜单中的【隐藏网格】，隐藏坐标系网格。

图 4.1-1

3．单击【数据】菜单中的【新建参数】，弹出新建参数对话框，新建参数 $b=0$ 、 $n=1$ 、 $m=1$；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 $n+2$ 。

4．用画点工具在 x 轴上取点 A ，选定点 A ，单击【度量】菜单中的【横坐标】，求出 A 的横坐标 x_{A} ；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 $b+\dfrac{\sin(n\cdot x_{\mathrm{A}})}{n}$ 。

5．依次选定 x_{A} 和 $b+\dfrac{\sin(n\cdot x_{\mathrm{A}})}{n}$ ，单击【绘图】菜单中的【绘制 (x,y) 】，以 x_{A} 为横坐标，以 $b+\dfrac{\sin(n\cdot x_{\mathrm{A}})}{n}$ 为纵坐标，绘制点 B 。

6．依次选定 $n=1$ 、 $b=0$ 、点 A 和 $m=1$ ，按下 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框，做深度迭代，将 $n=1$ 、$b=0$ 、点 A 的初像依次设为 $n+2$ 、$b+\dfrac{\sin(n\cdot x_{\mathrm{A}})}{n}$ 及点 B 。在迭代对话框的【显示】下拉菜单中选择“完整迭代”；在【结构】下拉菜单中不选“生成迭代数据表”（图 4.1-2）。单击“迭代”按钮得迭代像点。

7．选定迭代像点，单击【变换】菜单中的【终点】，得迭代像点的终点 C 。

8．选定点 A 和点 C ，单击【构造】菜单中的【轨迹】，作点 C 的轨迹（图 4.1-3）。此轨

迹就是函数 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ 的图像，随着迭代次数增加至 30 以上，图像逐渐变为方波（图 4.1-4）。

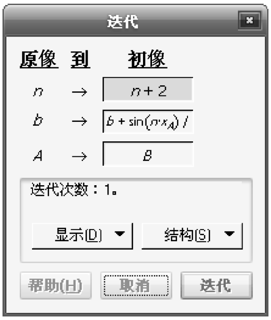


图 4.1-2

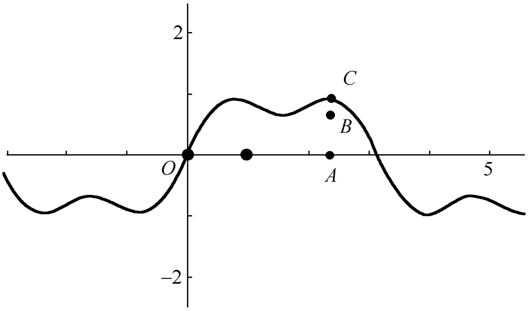


图 4.1-3

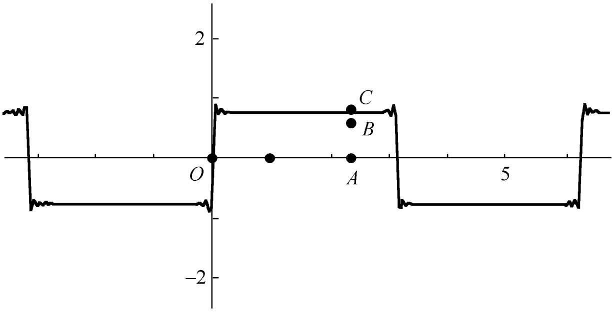


图 4.1-4

9．将以上制作的课件以“函数级数图像的绘制.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“函数级数图像的绘制.gsp”。

2．观察随着参数 m 的增减函数级数图像的变化情况；指出 $m=0$ 函数级数图像的实质，记录函数级数图像变为较好的方波时，参数 m 的取值情况。

3．绘制函数级数 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k)x}{2k}$ 的图像。

【经验点拨】

当图像的采样数量为默认值 500 时，图像的质量比较差，此时可用右击图像曲线，弹出快捷菜单，选属性项打开轨迹的属性对话框，在图像选项卡中将采样数量改为 2000（图 4.1-5），

即可得到较好的图像质量（图 4.1-6）。当图像采样数量较大时，增减迭代次数占用计算机较多资源，宜避免使用键盘“+、–”键连续调整，应采取直接修改参数的办法改变参数的值。

图 4.1-5

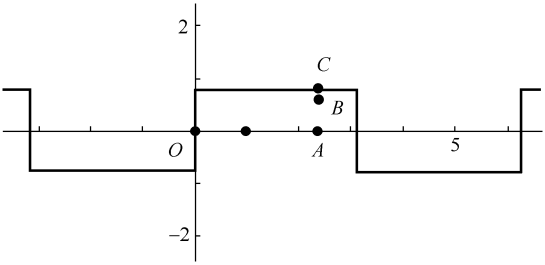


图 4.1-6

4.2　函数级数一致收敛的几何意义

函数级数一致收敛定义如下。

设函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 收敛于和函数 $S(x)$。若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathrm{N}_+$，$\forall n > N$（通用），$\forall x \in I$，有

$$|\ S(x) - S_n(x)\ | = |\ R_n(x)\ | < \varepsilon$$

则称函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛或一致收敛于和函数 $S(x)$。

若和函数 $S(x)$ 在区间 I 的图像是一条连续曲线，则函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 一致收敛于和函数 $S(x)$ 的几何意义是：不论给定的以曲线 $S(x)+\varepsilon$ 和 $S(x)-\varepsilon$ 为边界的带形区域怎样窄，总存在正整数 N（通用的 N），使得 $\forall n > N$，任意一个部分和 $S_n(x)$ 位于区间 I 上的图像都位于这个带形区域之内。

【实验内容】

利用几何画板的迭代功能，绘制函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$及由其和函数$S(x)$确定的以曲线为边界的带形区域$S(x)+\varepsilon$与$S(x)-\varepsilon$的图像。观察当$n$增大时，函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的图像的变化趋势，判定是否存在使函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$一致收敛的通用的正整数$N$。以$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$为例。

【实验思路】

通过几何画板的迭代功能，构建函数级数$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$的部分和函数$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$，并利用迭代像点的终点作轨迹，绘制$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$的图像；同时绘制$\ln(1+x)+\varepsilon$和$\ln(1+x)-\varepsilon$的图像。通过移动坐标系的刻度单位、改变$n$和$\varepsilon$的值来观察$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$的图像在由曲线$\ln(1+x)+\varepsilon$和$\ln(1+x)-\varepsilon$给出的带状区域的变化情况。

【软件技术要点】

1．参数选项的设置。
2．深度迭代。
3．迭代像点的终点。

【实验设计】

1．单击【编辑】菜单的【参数选项】，弹出参数选项对话框，将“单位”选项卡中的“角度（度）”、“距离（厘米）”、“其他（斜率、比……）”的精确度都设为十万分之一，选择应用于当前画板，单击“确定”按钮。

2．单击【绘图】菜单中的【定义坐标系】，建立坐标系，单击【绘图】菜单中的【隐藏网格】，隐藏坐标系网格。

3．单击【数据】菜单中的【新建函数】，弹出新建函数对话框，按“方程（Q）”打开下拉列表，确认方程的形式为$y=f(x)$。在输入框中输入“$\ln(1+x)$”（其中自然对数函数符号通过函数下拉列表中选用），单击“确定”按钮得新建函数$f(x)=\ln(1+x)$。

4．单击【数据】菜单中的【新建参数】，弹出新建参数对话框，新建参数$k=1$、$s=0$、

$n=1$。选定参数 $k=1$，右击弹出属性菜单，将其精度设为单位 1；类似地将参数 $n=1$ 精度设为单位 1。单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 $k+1$。

5．用画点工具在 x 轴上取点 A，选定点 A，单击【度量】菜单中的【横坐标】，求出 A 的横坐标 x_{A}；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 $s+\dfrac{(-1)^{k-1}\cdot x_{\mathrm{A}}^k}{k}$。依次选定 x_{A} 和 $s+\dfrac{(-1)^{k-1}\cdot x_{\mathrm{A}}^k}{k}$，单击【绘图】菜单中的【绘制 (x,y)】，以 x_{A} 为横坐标，以 $s+\dfrac{(-1)^{k-1}\cdot x_{\mathrm{A}}^k}{k}$ 为纵坐标，绘制点 B。

6．依次选定 $k=1$、$s=0$、点 A 和 $n=1$，按下 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框，作深度迭代，将 $k=1$、$s=0$、点 A 的初像依次设为 $k+1$、$s+\dfrac{(-1)^{k-1}\cdot x_{\mathrm{A}}^k}{k}$ 及点 B。在迭代对话框的【显示】下拉菜单中选择“完整迭代”；在【结构】下拉菜单中不选“生成迭代数据表”（图 4.2-1）。单击“迭代”按钮得迭代像点。

7．选定迭代像点，单击【变换】菜单中的【终点】，得迭代像点的终点 C。

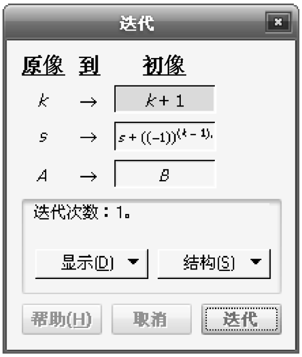


图 4.2-1

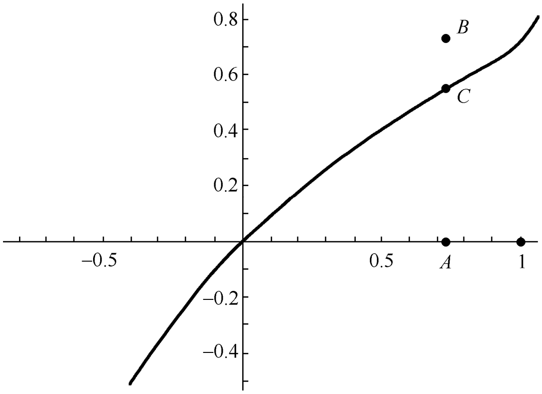


图 4.2-2

8．选定点 A 和点 C，单击【构造】菜单中的【轨迹】，作点 C 的轨迹。此轨迹就是函数 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ 的图像（图 4.2-2）。

9．单击【数据】菜单中的【新建参数】，弹出新建参数对话框，新建参数 $a=1$；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 $\dfrac{1}{a}$；选定计算量 $\dfrac{1}{a}$，右击弹出度量结果属性对话框，在“标签”选项卡的文本框中输入 e，将计算量 $\dfrac{1}{a}$ 的标签改为 e。

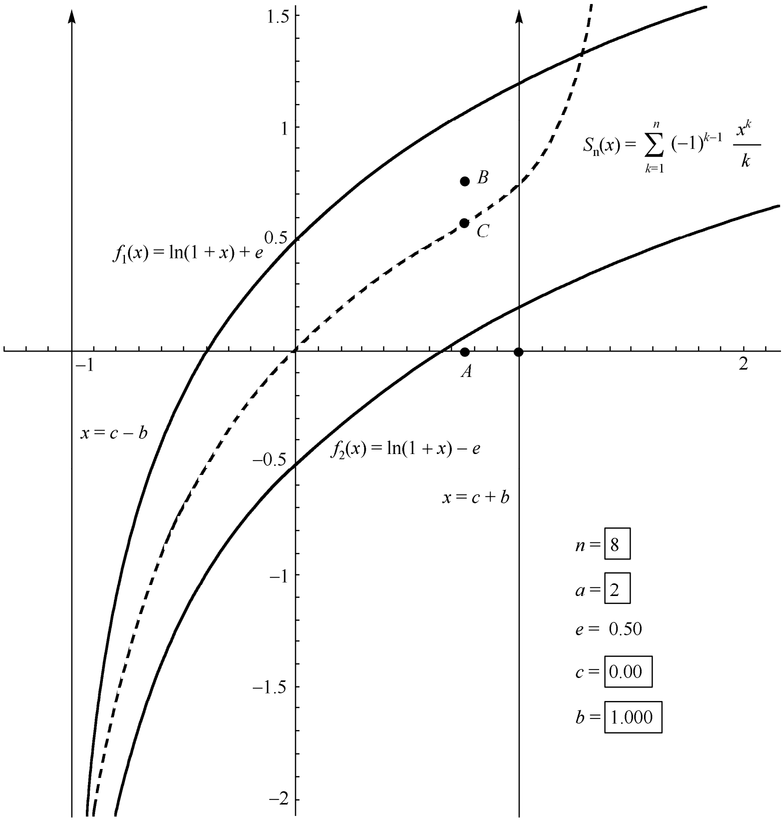


图 4.2-3

10．单击【绘图】菜单中的【绘制新函数】，打开新建函数对话框，按“方程（Q）”打开下拉列表，确认方程的形式为 $y=f(x)$ 。用选择工具单击窗口中的新建函数 $f(x)=\ln(1+x)$ ，按新建函数对话框中的“ x ”键，当输入框中显示 $f(x)$ 后再在其右侧输入“ $+e$ ”，单击“确定”按钮即得 $f_1(x)=\ln(1+x)+e$ 的图像。将鼠标光标移到曲线 $f_1(x)=\ln(1+x)+e$ 上，右击弹出快捷菜单，通过颜色选项选择深绿色块，将直线 $f_1(x)=\ln(1+x)+e$ 设为深绿色。用同样的方法作 $f_2(x)=\ln(1+x)-e$ 的图像（图 4.2-3）。

11．新建参数 $b=1$ ，$c=0$ ，选定 $b=1$ ，右击弹出属性对话框，将“数值”选项卡中的“精确度”设为千分之一；将“动画参数”选项卡中的“键盘调节+/–”设为改变以 0.01 单位，同理设置参数 c。单击【绘图】菜单中的【绘制新函数】，打开新建函数对话框，按“方程（Q）”打开下拉列表，确认方程的形式为 $x=g(y)$ ，在输入框中输入“ $c+b$ ”，单击“确定”按钮作直线 $x=c+b$ ；类似地作直线 $x=c-b$ 。

12．将以上制作的课件以“函数级数一致收敛的几何意义.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“函数级数一致收敛的几何意义.gsp”。

2．观察由 $f_1(x)=\ln(1+x)+e$ 和 $f_2(x)=\ln(1+x)-e$ 确定的带形区域与部分和函数 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ 的图像的关系，确定在区间 $(-1,1)$ 内，是否不管由 $f_1(x)=\ln(1+x)+e$ 和 $f_2(x)=\ln(1+x)-e$ 确定的带形区域多么窄，总可以通过增大参数 n 的值，使函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ 的部分和函数 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ 的图像位于这个带形区域之内。在区间 $(-0.9,0.9)$ 内，对 $e=0.1250$ 和 $e=0.0625$，分别确定 $N\in\mathrm{N}_+$，使得 $\forall n>N$，$\forall x\in(-0.9,0.9)$，有 $|\ln(1+x)-S_n(x)|<e$，并记录 e 和 N 的取值。

【经验点拨】

以上课件，通过改变参数 a 可以改变 e 的值，调整由 $f_1(x)=\ln(1+x)+e$ 和 $f_2(x)=\ln(1+x)-e$ 确定的带形区域的宽窄；改变 c 和 b 的值，可以左右移动两条直线 $x=c+b$ 和 $x=c-b$ 的位置或调整两条直线间的距离；移动坐标系的单位点，可将坐标系的单位刻度放大，配合窗口下方水平滑块的上下左右移动，可以更详细观察部分和函数 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ 图像和由 $f_1(x)=\ln(1+x)+e$ 和 $f_2(x)=\ln(1+x)-e$ 确定的带形区域的关系。利用课件，可以观察到：在区间 $(-1,1)$ 内，不管由 $f_1(x)=\ln(1+x)+e$ 和 $f_2(x)=\ln(1+x)-e$ 确定的带形区域多么窄，总可以通过增大参数 n 的值，使函数级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ 的部分和函数 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ 的图像位于这个带形区域之内。这表明：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathrm{N}_+$，$\forall n>N$（通用），$\forall x\in I$，有

$$|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$$

故函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 在区间 $I=(-1,1)$ 一致收敛于和函数 $S(x)=\ln(1+x)$。

4.3 函数 $f(x)$ 及其麦克劳林级数图像的比较

由数学分析的知识，若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有任意阶导数，则有与函数 $f(x)$ 相对应的泰勒级数

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

令 $x_0=0$，即得函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

【实验内容】

利用几何画板的迭代功能，绘制函数 $f(x)$ 及其麦克劳林级数的图像，观察当 n 增大时 $f(x)$ 的麦克劳林级数图像变化的趋势，比较 $f(x)$ 及其麦克劳林级数的图像。以 $f(x)=\cos x$ 的麦克劳林展开式为例。

【实验思路】

通过几何画板的迭代功能，构建 $f(x)=\cos x$ 的麦克劳林级数

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

利用迭代像点的终点作轨迹，绘制 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$ 的图像。

【软件技术要点】

1．取整函数 trunc 的使用。
2．【导数】功能的使用。
3．【深度迭代】的使用。
4．迭代像点【终点】的使用。

【实验设计】

1．新建画板，单击【绘图】菜单中的【定义坐标系】，建立坐标系，单击【绘图】菜单中的【隐藏网格】，隐藏坐标系网格。

2．单击【数据】菜单中的【新建参数】，弹出新建参数对话框，新建参数 $a=1$、$b=1$、$m=1$、$n=1$，选定参数 $a=1$，右击弹出属性对话框，将 $a=1$ 的精度设为十万分之一，类似地将 $b=1$ 的精度设为十万分之一，将 $m=1$、$n=1$ 的精度设为单位 1；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，分别计算 $m-1$、$n+1$、$\mathrm{trunc}\left(\frac{n}{2}\right)$ 及 $(-1)^{\mathrm{trunc}\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(\frac{(-1)^n+1}{2}\right)$。

3．用画点工具在 x 轴上取点 A，选定点 A，单击【度量】菜单中的【横坐标】，求出 A 的横坐标 x_{A}；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 $a\cdot\frac{x_{\mathrm{A}}}{n}$ 和 $b+(-1)^{\mathrm{trunc}\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(\frac{(-1)^n+1}{2}\right)\cdot a\cdot\frac{x_{\mathrm{A}}}{n}$。

4．依次选定 x_{A} 和 $b+(-1)^{\mathrm{trunc}\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(\frac{(-1)^n+1}{2}\right)\cdot a\cdot\frac{x_{\mathrm{A}}}{n}$，单击【绘图】菜单中的【绘制 (x,y)】，以 x_{A} 为横坐标，以 $b+(-1)^{\mathrm{trunc}\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(\frac{(-1)^n+1}{2}\right)\cdot a\cdot\frac{x_{\mathrm{A}}}{n}$ 为纵坐标，绘制点 B。

5．依次选定 $n=1$、$a=1$、$b=1$、点 A 和 $m-1$，按下 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框，作深度迭代，将 $n=1$、$a=1$、$b=1$、点 A 的初像依次设为 $n+1$、$a\cdot\dfrac{x_{\mathrm{A}}}{n}$、$b+(-1)^{\operatorname{trunc}\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(\dfrac{(-1)^n+1}{2}\right)\cdot a\cdot\dfrac{x_{\mathrm{A}}}{n}$ 及点 B。在迭代对话框的【显示】下拉菜单中选择“完整迭代”；在【结构】下拉菜单中选择“所有对象的像”，不选择“生成迭代数据表”（图 4.3-1）。单击“迭代”按钮得迭代像点。

6．选定迭代像点，单击【变换】菜单中的【终点】，得迭代像点的终点 C（图 4.3-2）。

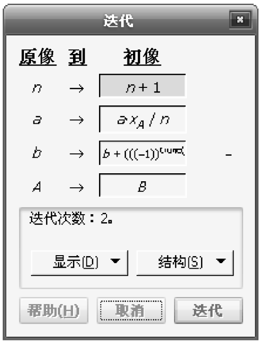


图 4.3-1

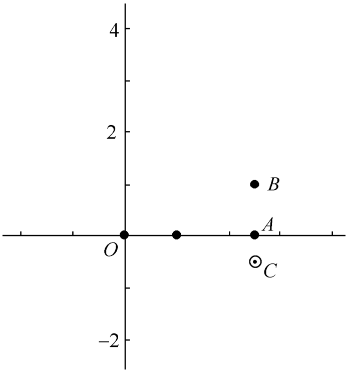


图 4.3-2

7．选定点 A 和点 C，单击【构造】菜单中的【轨迹】，作点 C 的轨迹。此轨迹就是 $f(x)=\cos x$ 的 m 阶麦克劳林展开式 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$ 的图像（图 4.3-3）。

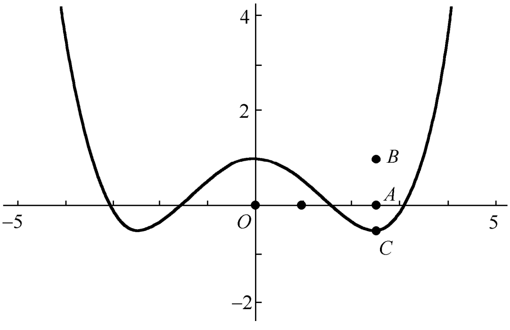


图 4.3-3

8．用画线工具在屏幕右上角作线段 DE，用画点工具在 DE 上取点 F，依次选定点 D、E、F，单击【度量】菜单中的【比】，计算比值 $\dfrac{DF}{DE}$；选定 $\dfrac{DF}{DE}$，右击弹出度量结果属性对话框，在“标签”选项卡的文本框中输入 c，将 $\dfrac{DF}{DE}$ 的标签改为 c。

9．单击【编辑】菜单中的【参数选项】，打开参数选项对话框，将“单位”选项卡中的

角度单位设为弧度。单击【绘图】菜单中的【绘制新函数】，弹出新建函数对话框，输入函数 $\cos x+c$，单击“确定”按钮，绘制函数 $g(x)=\cos x+c$ 的图像，即图像为可上下平移的余弦函数曲线。

10．将以上制作的课件以“函数及其麦克劳林级数图像的比较.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“函数及其麦克劳林级数图像的比较.gsp”。

2．通过改变参数 m 的值，观察函数 $f(x)=\cos x$ 不同阶数的麦克劳林展开式图像的变化情况。对函数 $f(x)=\cos x$ 及其麦克劳林展开式的图像进行比较，分别记录当 $m=4$、$m=8$ 和 $m=20$ 时函数 $f(x)=\cos x$ 及其麦克劳林展开式的图像能完全重合的区间。

【经验点拨】

选定参数 m，按下小键盘上的“+”、“−”键改变参数 m 的值，可得到不同阶数的麦克劳林展开式的图像。为了将 $f(x)=\cos x$ 麦克劳林展开式的图像及 $g(x)=\cos x+c$ 的图像进行比较，只需拖动线段 DE 上的点 F，即可将曲线 $g(x)=\cos x+c$ 上下移动。经迭合比较，可知当 $m=6$ 时，$f(x)=\cos x$ 的麦克劳林展开式位于 $(-2.8, 2.8)$ 区间内的图像与 $g(x)$ 的图像完全重合，而其余区间的图像向下方无限伸展（图 4.3-4），此时迭代次数为 6 次，对应于 $f(x)=\cos x$ 的为 6 阶麦克劳林展开式 $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}$。随着迭代次数的增加，图像能完全重合的区间长度越来越大（图 4.3-5）。

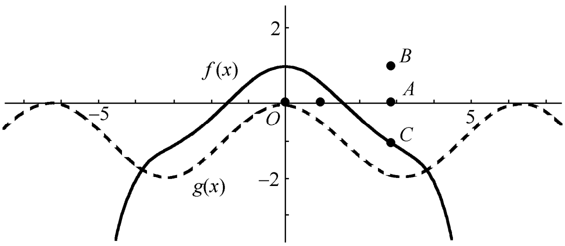


图 4.3-4

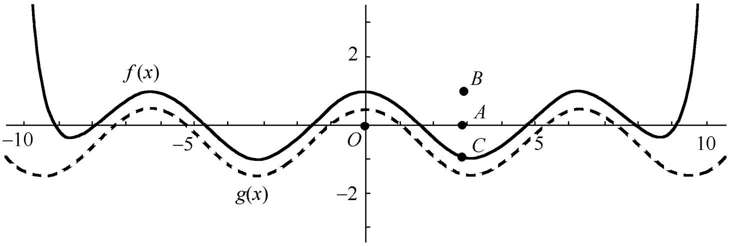


图 4.3-5

实验 5　定积分的黎曼和

定积分是数学分析的重要组成部分之一。定积分由计算平面上封闭曲线围成区域的面积产生，归结为计算具有特定结构的和式的极限。事实上，在自然科学和工程技术中，还有许多问题（如变力作功、水的压力、立体的体积等）都要归结为计算这种特定结构的和式的极限。因此，了解这种特定结构的和式极限的计算及其几何意义，对定积分知识的学习，有着积极的意义。

【实验目的】

通过利用几何画板的迭代功能计算定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的黎曼和，掌握用几何画板迭代功能对曲边梯形分割求和的方法；加深对定积分理论中分割、近似、求和、取极限的思想方法的理解，更好地掌握定积分的概念。

5.1　梯形面积的另类计算方法

梯形面积公式是我们熟知的公式，假如没有这个公式，而只有矩形的面积计算公式，该怎样去计算梯形的面积呢？下面以直角梯形为例，给出一种将梯形分割后，以矩形近似代替，再求和的计算方法。

【实验内容】

利用分割求和的方法，求直角梯形的面积。设直角梯形为 $ABCD$ ，其中 $AD//BC$ ，$\angle A=\angle B=90^\circ$， $AD<BC$ 。

【实验思路】

将 AB 边 n 等分，过这些分点作 AD 的平行线，将直角梯形 $ABCD$ 分割为 n 个直角小梯形，求这些小梯形面积的和，即可求出梯形 $ABCD$ 的面积。当 n 充分大时，直角小梯形两底的长度趋于相等，直角小梯形趋于矩形，其面积可以用矩形面积近似代替。因此，可通过计算矩形面积求出直角梯形 $ABCD$ 的面积。

【实验设计】

1．单击【编辑】菜单的【参数选项】，弹出参数选项对话框，将“单位”选项卡中“其他（斜率、比……）”的精确度设为十万分之一，选择应用于当前画板，单击“确定”按钮。

2．用画线工具作水平线段 AB ，选定 A 、B 两点及线段 AB ，单击【构造】菜单中的【垂

线】，过 A 、B 两点作线段 AB 的垂线 j 和 k ；在线段 AB 上方任作直线 l 与垂线 k 和 j 相交，得交点 C 、D ，选定直线 l 与垂线 k 和 j ，单击【显示】菜单中的【隐藏直线】，将所选直线隐藏，依次连接 A 、B 、C 、D 四点，得梯形 $ABCD$ 。

3．单击【数据】菜单中的【新建参数】，弹出新建参数对话框，新建参数 $n=2$ ；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 $n-1$ 的值；再次单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算 $\frac{1}{n}$ 的值。单击【数据】菜单中的【新建参数】，弹出新建参数对话框，新建参数 $s=0.00000$ 。

4．选定点 A ，单击【变换】菜单中的【标记中心】，将点 A 标记为中心（也可直接双击点 A 将 A 标记为中心）。选定点 B ，单击【变换】菜单中的【缩放】，弹出缩放对话框，将缩放参数设为标记比 $\frac{1}{n}$ ，单击“缩放”按钮，将点 B 以点 A 为中心、按标记比 $\frac{1}{n}$ 进行缩放得缩放像点 B' 。

5．选定点 B' 和线段 AB ，单击【构造】菜单中的【垂线】，过点 B' 作线段 AB 的垂线 m ，与线段 CD 相交得交点 E ；选定点 D 和线段 AB ，单击【构造】菜单中的【平行线】，过点 D 作线段 AB 的平行线 n ，交垂线 m 于点 F 。选定垂线 m 和平行线 n ，单击【显示】菜单中的【隐藏直线】，将垂线 m 和平行线 n 隐藏。连接点 B' 、E 得线段 $B'E$ ，连接点 D 、F 得线段 DF 。

6. 依次选定点 A 、B' 、F 、D ，单击【构造】菜单中的【四边形内部】，建立四边形 $AB'FD$ ，紧接着单击【度量】菜单中的【面积】，求矩形 $AB'FD$ 的面积，得“ $AB'FD$ 的面积＝××cm^2”。单击【数据】菜单中的【计算】，计算 $s+$ $AB'FD$ 的面积。

7．依次选定参数 $n=2$ 、点 A 、参数 $s=0$ 和计算量 $n-1$，按下 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框，将原像 $n=2$ 的初像设为 $n-1$，将原像 A 的初像设为 B' ，将原像 $s=0$ 的初像设为 $s+$ $AB'FD$ 的面积；单击“显示”下拉列表按钮，选择“完整迭代”选项，单击“结构”下拉列表，选择“仅保留非点类像”和“生成迭代数据表”选项，单击“迭代”按钮，完成深度迭代（图 5.1-1）。参数 $n=5$ 时的迭代像（图 5.1-2）及生成的迭代数据表（图 5.1-3）。

图 5.1-1

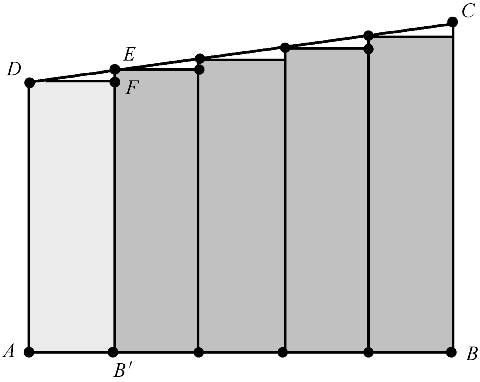


图 5.1-2

$ABCD$的面积 = 50.45024 cm^2

n	$n-1$	$\frac{1}{n}$	$AB'FD$的面积	$s+AB'FD$的面积
0	4.00	0.20	9.14859cm^2	9.14859
1	3.00	0.25	9.52517cm^2	18.67376
2	2.00	0.33	9.90176cm^2	28.57552
3	1.00	0.50	10.27834cm^2	38.85385
4	0.00	1.00	10.65492 cm^2	49.50878

图 5.1-3

8. 依次选定点 A、B、C、D，单击【构造】菜单中的【四边形的内部】，建立四边形 $ABCD$，单击【度量】菜单中的【面积】，求梯形 $ABCD$ 的面积，窗口出现“$ABCD$ 的面积＝××cm^2”。用鼠标光标单击四边形内部选定四边形 $ABCD$，单击【显示】菜单中的【隐藏四边形】，将四边形 $ABCD$（内部）隐藏。

9．将以上制作的课件以“梯形面积的另类计算方法.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“梯形面积的另类计算方法.gsp”。

2．改变参数 n 的值，观察梯形的分割及迭代数据表中各列数据的变化情况，理解迭代数据表中各列数据的含义；记录迭代面积“$s+AB'FD$ 的面积”与梯形 $ABCD$ 面积分别小于 0.5cm^2、0.1cm^2 及 0.05cm^2 时，迭代次数及迭代面积 $s+AB'FD$ 的面积的三组值。

3．设计通过分割求和的方法计算圆面积的课件。

【经验点拨】

以上方法实际上是用 n 个小矩形的面积代替 n 个小梯形的面积来求大梯形的面积，当参数 n 的值很大时，小矩形的宽 $\dfrac{AB}{n}$ 很小，每个小矩形与相应小梯形面积的误差也就非常小；因此，以所有小矩形面积的和作为大梯形的面积，其与梯形面积的实际值就非常接近。所以，当 CD 不是直线段而是曲线，也即四边形 $ABCD$ 为曲边梯形时，仍可使用此法来求 $ABCD$ 的面积。类似地，用 n 个小三角形的面积代替 n 个小扇形面积，当参数 n 的值很大时，可近似求出圆的面积。

5.2　定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的黎曼和算法

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在数值上等于以曲线 $y=f(x)$ 和三条直线 $y=0$、$x=a$、$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积。对于曲边梯形的面积，没有初等的求解方法。一种解决的办法是分割后再求和：设想将区间 $[a,b]$ 分为 n 个小区间，以每个小区间左端点对应的函数值为高，以小区间的长度为宽，构造 n 个矩形，并以这些小矩形的面积的和（黎曼和）近似代替曲边梯

形的面积。当改变参数 n 的大小时，随着 n 的逐渐增大（并且每个小区间的长度逐渐缩小），黎曼和的值逐渐趋近定积分的值。黎曼和逼近定积分值的动态过程演示，可利用几何画板制作。

【实验内容】

利用几何画板的迭代功能计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的黎曼和，即计算以曲线 $y=f(x)$ 和三条直线 $y=0$、$x=a$、$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积。通过将区间 $[a,b]$ 分为 t 个小区间，以 t 个小矩形的面积的和（黎曼和）近似代替曲边梯形的面积。观察当参数 t 的值逐渐增大时黎曼和的值的变化情况。以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ 为例。

【实验思路】

在直角坐标系上作出函数 $f(x)$ 的图像。在 x 轴上取点 A、B，新建参数 t，将区间 $[A,B]$ 平均分为 t 个小区间，求出每个小区间左端点对应的函数值，以此为矩形的高，以小区间的长度为矩形的宽，作矩形，求出这 t 个矩形的面积和。这个面积和就是 $f(x)$ 在区间 $[A,B]$ 上的定积分的近似值。随着 t 值的增大，且每个小区间长度的缩小，这个面积和越来越接近 $f(x)$ 在区间 $[A,B]$ 上的定积分的值。利用两个深度迭代构建 t 个矩形计算黎曼和，一个迭代构建 t 个矩形，另一个迭代计算面积和。

【软件技术要点】

【深度迭代】菜单的使用。

【实验设计】

1．单击【编辑】菜单的【参数选项】，弹出参数选项对话框，将“单位”选项卡中“其他（斜率、比……）”的精确度设为十万分之一，选择应用于当前画板，单击“确定”按钮。

2．单击【绘图】菜单中的【定义坐标系】，建立直角坐标系；用鼠标按住原点把坐标原点拖曳到靠窗口下边沿的地方；单击【绘图】菜单中的【隐藏网格】，将网格隐藏。

3．单击【数据】菜单中的【新建函数】，弹出新建函数对话框，新建函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$；紧接着单击【绘图】菜单中的【绘制函数】，在直角坐标系中绘出 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ 的图像。

4．用画点工具在 x 轴上取点 A，单击【度量】菜单中的【横坐标】，求出点 A 的横坐标 x_A；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，依次点“$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$”、“x_A”后单击“确定”按钮，计算出 $f(x_A)$ 的值。用同样的方法在 x 轴上取点 B，求出点 B 的横坐标 x_B 并计算出 $f(x_B)$ 的值。

5．用选择工具依次选定 x_A 和 $f(x_A)$，单击【绘图】菜单中的【绘制点】，作出直线 $x=x_A$ 与曲线 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ 的交点 C，用画线工具作线段 AC；用同样的方法作出直线 $x=x_B$ 与曲线 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ 的交点 D，并作线段 BD（图 5.2-1）。

6．单击【数据】菜单中的【新建参数】，弹出新建参数对话框，将名称设为 t、值设为 2、单位设为无，单击“确定”按钮得新建参数 $t=2$；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算出 $t-1$ 的值；再次单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算出 $\frac{1}{t}$ 的值。

7．选择工具选定点 A，单击【变换】菜单中的【标记中心】，将点 A 标记为中心，选择工具选定点 B，单击【变换】菜单中的【缩放】，弹出缩放对话框，单击画板窗口的计算值 $\frac{1}{t}$，将缩放参数设为标记比 $\frac{1}{t}$，单击“缩放”按钮得点 B 的缩放像点 B'。

8．用计算 x_A 和 $f(x_A)$ 的方法求出 $x_{B'}$ 和 $f(x_{B'})$，以 $x_{B'}$ 和 $f(x_{B'})$ 为坐标作出 $x=x_{B'}$ 与曲线 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ 的交点 E；选择工具选定点 B'、E，单击【构造】菜单中的【直线】，作直线 $B'E$。

9．用选择工具选定点 C 和直线 $B'E$，单击【构造】菜单中的【垂线】，作过点 C 垂直 $B'E$ 的直线 j，用选择工具选定直线 j 和直线 $B'E$，单击【构造】菜单中的【交点】，作 j 和 $B'E$ 的交点 F（图 5.2-2）。

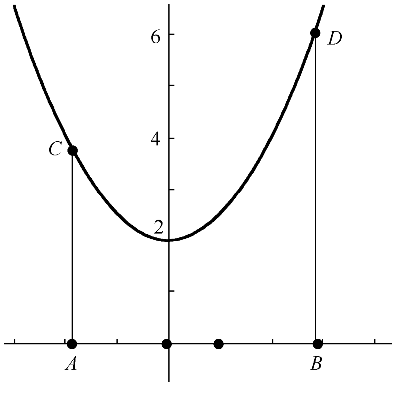


图 5.2-1

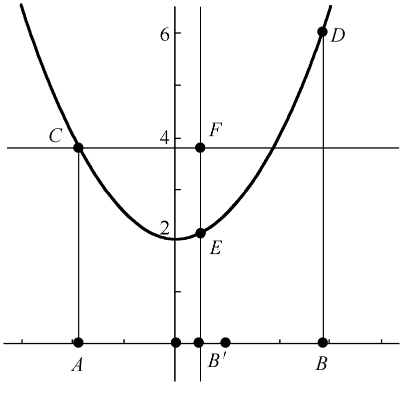


图 5.2-2

10．用选择工具选定直线 j 和直线 $B'E$（不选点 F），单击【显示】菜单中的【隐藏直线】，将定直线 j 和直线 $B'E$ 隐藏。用画线工具作线段 $B'F$ 和 CF；用选择工具依次选定点 A、B'、F、C，单击【构造】菜单中的【四边形内部】，构建矩形 $AB'FC$。用选择工具选定 C、F、E、D，单击【显示】菜单中的【隐藏点】，将 C、F、E、D 四点隐藏（图 5.2-3）。

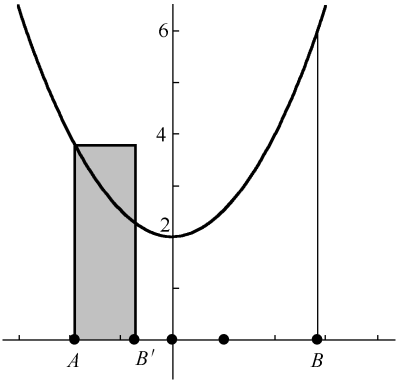


图 5.2-3

11．用选择工具依次选定参数t、点A、计算值$t-1$，按下 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框，将原像t的初像设为$t-1$，将原像A的初像设为B'（图 5.2-4）；单击“显示”下拉列表按钮，选择“完整迭代”选项，单击“结构”下拉列表，选择“仅保留非点类像”选项，单击“迭代”按钮，完成深度迭代（图 5.2-5）。

图 5.2-4

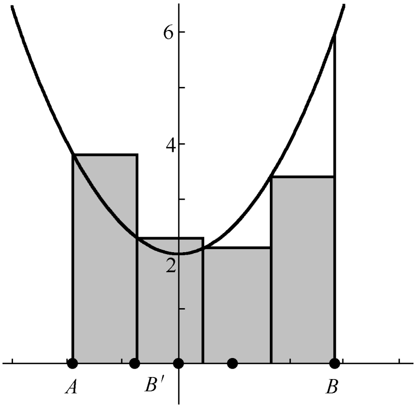


图 5.2-5

12．用画点工具在x轴上取点G，单击【度量】菜单中的【横坐标】、【纵坐标】，求出点G的横坐标x_G和纵坐标y_G。

13．单击【数据】菜单中的【新建参数】，弹出新建参数对话框，将名称设为n、值设为 0、单位设为无，单击“确定”按钮得新建参数$n=0$；单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算出$n+1$的值。

14．单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算出$x_A+n\dfrac{x_B-x_A}{t}$的值；再

单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，计算出 $y_{G}+f\left(x_{A}+n\dfrac{x_{B}-x_{A}}{t}\right)\cdot\dfrac{x_{B}-x_{A}}{t}$ 的值。

15．依次选定 x_G 和 $y_{G}+f\left(x_{A}+n\dfrac{x_{B}-x_{A}}{t}\right)\cdot\dfrac{x_{B}-x_{A}}{t}$，单击【绘图】菜单中的【绘制点】，绘制以 x_G 和 $y_{G}+f\left(x_{A}+n\dfrac{x_{B}-x_{A}}{t}\right)\cdot\dfrac{x_{B}-x_{A}}{t}$ 为横坐标和纵坐标的点 H。

16．用选择工具依次选定点 G、参数 n、计算值 $t-1$，按住 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度代】，弹出迭代对话框，将原像点 G 的初像设为 H，将原像 n 的初像设为 $n+1$；单击“显示”下拉列表按钮，选择“最终迭代”选项，单击“结构”下拉列表，不选择任何选项，单击“迭代”按钮完成深度迭代。紧接着单击【变换】菜单中的【终点】，构建终点 I；单击【度量】菜单中的【纵坐标】，计算出点 I 的纵坐标 y_I，y_I 的值就是 t 个矩形面积的和（图 5.2-6）。变动参数 t 的值，可见 y_I 的值随之改变（图 5.2-7）。

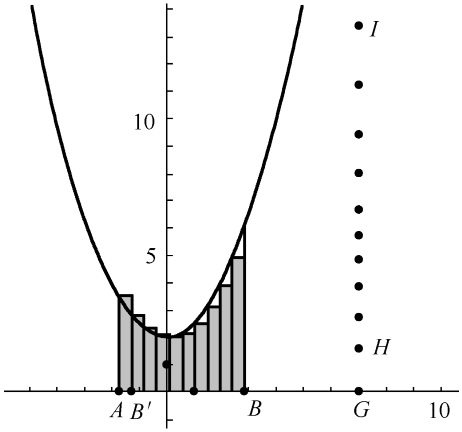


图 5.2-6

17．单击【数据】菜单中的【新建函数】，弹出新建函数对话框，新建函数 $g(x)=\dfrac{1}{6}x^{3}+2x$，$g(x)$ 即 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^{2}+2$ 的原函数。单击【数据】菜单中的【计算】，弹出新建计算对话框，依次点 “$g(x)$”、“x_B”、“$-$”、“$g(x)$”、“x_A”，单击“确定”按钮，计算出 $g(x_B)-g(x_A)$ 的值，这个值就是 $\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 的值。

18．将以上制作的课件以“定积分的黎曼和算法.gsp”保存。

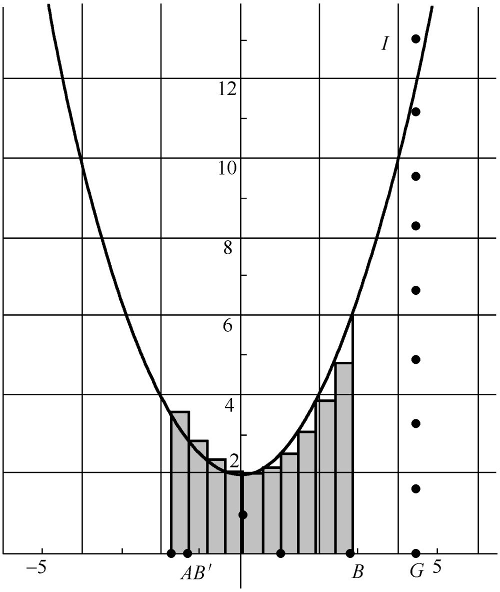


图 5.2-7

【实验要求】

1．运行课件“定积分的黎曼和算法.gsp”。

2．通过变动参数 t 的大小，观察 t 个矩形的变化情况；对 y_I（也即 t 个矩形面积和的值）与 $g(x_B)-g(x_A)$（也即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$）的值进行比较。记录 y_I 与 $g(x_B)-g(x_A)$ 的误差分别小于 0.5、0.1 及 0.05 时，迭代次数及 y_I 的三组值。

3．设计通过以 t 个小梯形的面积的和（黎曼和）近似代替曲边梯形的面积求定积分的课件。运行“梯形法”求黎曼和课件，比较两种方法求黎曼和时的收敛速度。

【经验点拨】

可以先完成关于 t 个矩形面积和计算的原像及初像的设置，即先完成步骤 12 至 15，然后将图形的迭代和面积的迭代一起进行，即步骤 11 和步骤 16 合并在一起进行。

t 个小矩形面积的和也可以用上节（构造矩形内部通过度量菜单直接求出面积的值）的方法计算，此时应注意不要移动坐标系中的单位点，否则会因长度单位不同而造成所求黎曼和与 $g(x_B)-g(x_A)$ 的值出现较大的误差。

实验 6　曲线的绘制

在解析几何学习中，了解曲线构成的方法、准确绘制曲线图形，可以更好地认识曲线，对掌握曲线定义和相关性质有着重要的作用和意义。

【实验目的】

利用轨迹方法，根据曲线定义和相关性质绘制平面曲线及空间曲线；加深对曲线定义和相关性质的理解掌握。

6.1　平面曲线的绘制

对于平面曲线的绘制，如果曲线的方程已知，且可表示为单值函数，此种情况下，只要使用几何画板绘图菜单的【绘制（新）函数】或【绘制函数】功能，即可直接绘出曲线图形。本书关注的主要是根据曲线的定义绘制曲线。

【实验内容】

根据曲线的定义，绘制摆线（旋轮线）、内旋轮线等曲线。

6.1.1　实验 1　摆线（旋轮线）的绘制

旋轮线是指一个圆在一条定直线上滚动（不是滑动）时，圆上一点的轨迹。

【实验思路】

在线段 AB 上取点 C，以点 C 为圆心作一圆 c_1，构建点 C 在 AB 上运动的动画，将点 C 在 AB 上移动的线速度转化为点在圆 c_1 上运动的角速度，确定此点并绘制其轨迹，即得旋轮线。

【软件技术要点】

1.【显示】菜单中追踪功能的运用。
2.【构造】菜单中的【轨迹】菜单项的使用。

【实验设计】

1. 作较长的水平线段 AB，在 AB 上取点 C。
2. 作线段 DE，以 C 为圆心、DE 为半径作圆 c_1。

3．分别计算 AC 和 DE 的距离，计算 $-\dfrac{AC}{\pi \cdot DE}\times 180^\circ$。

4．过点 C 作线段 AB 的垂线 j；作垂线 j 和圆 c_1 下半圆周的交点 F。

5．以点 C 为旋转中心，将点 F 旋转，旋转角为 $-\dfrac{AC}{\pi \cdot DE}\times 180^\circ$，得旋转像点 F'；用画线工具作线段 CF'。将点 F' 绕点 C 旋转 120° 和 240° 得像点 F'' 和 F'''，并作线段 CF'' 和 CF'''。

6．将 CF 标记为向量，将线段 AB 按标记向量平移得平移像线段 $A'B'$（图 6.1-1）。

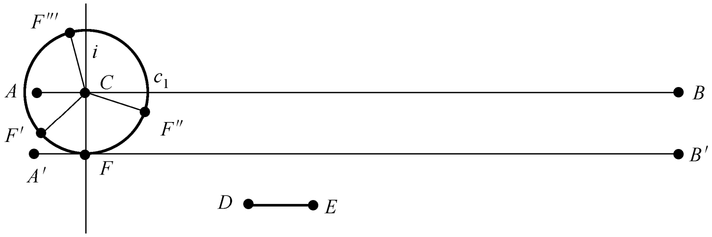


图 6.1-1

7．追踪点 F'；设置点 C 沿着线段 AB 以中速双向运动的【动画】按钮，将动画按钮标签设为“绘制旋轮线”。

8．隐藏线段 AB、垂线 j 和交点 F。

9．将以上制作的课件以“摆线（旋轮线）的绘制.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行“摆线（旋轮线）的绘制.gsp”课件。

2．观察摆线（旋轮线）的动态绘制。

3．修改课件“摆线（旋轮线）的绘制.gsp”，利用“轨迹”的功能生成“永久性”摆线（旋轮线）。

4．将课件中三点 F'、F''、F''' 连成等边三角形，并过点 C 作线段 $A'B'$ 的垂线与等边三角形 $F'F''F'''$ 三边交于三点，观察追踪这三点所形成的曲线，你得到什么启示？对“在特定的路面上，三角形车轮的车也能平稳（不颠簸）地行驶”的说法，你认同吗？对椭圆形车轮的车呢？请通过绘制相应的曲线说明。

【经验点拨】

运行“摆线（旋轮线）的绘制.gsp”课件，单击“绘制旋轮线”动画按钮，即可见点 F' 所在圆 c_1 在线段 $A'B'$ 上滚动（几何画板软件没有能使圆滚动的功能，以上所见的“滚动”，实质上是点 C 在线段 AB 上移动而点 F' 按相应的角速度在圆 c_1 上转动所形成的视觉效果），在圆 c_1 滚动的同时，点 F' 留下的踪迹就是旋轮线（图 6.1-2）。将点 F' 绕点 C 旋转 120° 和 240° 得像点 F'' 和 F'''，并作线段 CF'' 和 CF'''，使圆 c_1 呈车轮状，是为了使圆 c_1 的滚动更形象。

椭圆形车轮的车形成的相应曲线如下（图 6.1-3）。

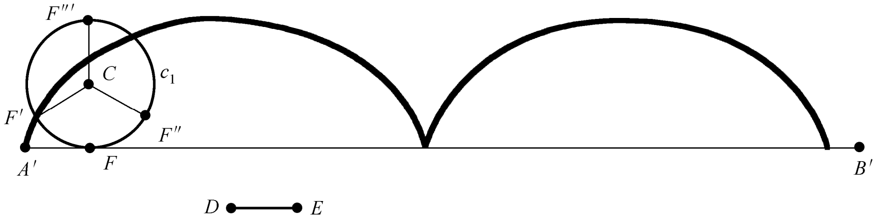


图 6.1-2

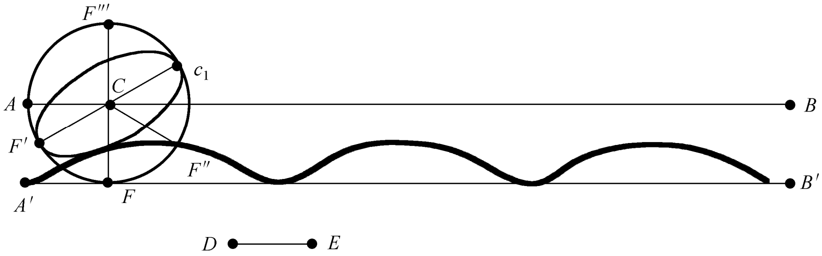


图 6.1-3

6.1.2 实验 2 内旋轮线的绘制

内旋轮线是指一小圆在一固定大圆内部，沿大圆内侧滚动（不是滑动）时，小圆上一定点的轨迹。试绘制内旋轮线。

【实验思路】

在定大圆 c_1 内部作一个较小的同心圆 c_2，以 c_1、c_2 两圆半径的差为半径，以同心圆 c_2 上一点 C 为圆心作一圆 c_3，构建点 C 在同心圆 c_2 运动的动画，将点 C 在同心圆 c_2 上移动的角速度转化为点在圆 c_3 上运动的角速度，确定此点并绘制其轨迹，即得内旋轮线。

【实验设计】

1．作线段 AB。作长度大于线段 AB 长度两倍的水平线段 CD，作线段 CD 的中点 E。

2．新建参数 $n=3$。

3．计算 AB 的距离；分别计算 $\dfrac{AB}{n}$ 和 $\dfrac{(n-1)\cdot AB}{n}$。将 AB 距离的标签改为定圆半径；将 $\dfrac{AB}{n}$ 的标签改为动圆半径。

4．以点 E 为圆心、线段 AB 为半径作圆 c_1；以点 E 为圆心、计算量 $\dfrac{(n-1)\cdot AB}{n}$ 为半径作圆 c_2。

5．作线段 CD 和圆 c_1 的右交点 F。

6．在圆 c_2 上取点 G，作射线 EG，作射线 EG 和圆 c_1 的交点 H。

7．依次选定点 E、F、H，单击【构造】菜单中【圆上的弧】菜单项，构造圆 c_1 上的弧 FH，度量弧 FH 的长度。

8．计算 $-\dfrac{\text{弧}FH\text{的长度}}{\pi\cdot\text{动圆半径}}\times180^\circ$。

9．以点 G 为圆心、动圆半径为半径作圆 c_3。

10．以点 G 为旋转中心；以计算量 $-\dfrac{\text{弧}FH\text{的长度}}{\pi\cdot\text{动圆半径}}\times180^\circ$ 为旋转角，将点 H 旋转得旋转像点 H'。将点 H' 旋转 120° 得旋转像点 H''，再旋转 120° 得旋转像点 H'''。

11．作线段 GH'、GH'' 和 GH'''（图 6.1-4）。

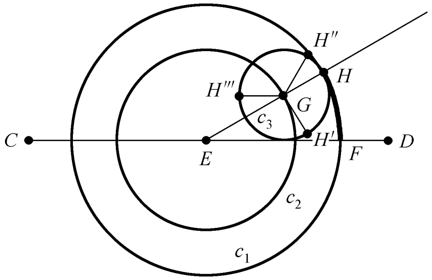


图 6.1-4

12．追踪点 H'。设置点 G 沿着圆 c_2 以逆时针方向中速运动的动画按钮，将动画标签设为“绘制内旋轮线”。

13．选定点 E，单击【编辑】菜单的【操作类按钮】选项，单击“隐藏/显示”的“隐藏中点 E”按钮；右击该按钮弹出快捷菜单，选择“属性”项打开属性对话框，在“隐藏/显示”选项卡中选择“总是显示”，单击“确定”按钮得“显示中点 E”按钮。选定“显示中点 E”按钮，单击【编辑】菜单的【操作类按钮】选项，单击“系列”的“系列动作”按钮，在弹出的对话框中选定“系列按钮”选项卡中的“清除所有追踪痕迹”，将“系列动作”按钮的标签改为“复位”。

14．隐藏多余的对象。

15．将以上制作的课件以“内旋轮线的绘制.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行“内旋轮线的绘制.gsp”课件。

2．观察内旋轮线的动态绘制。修改课件“内旋轮线的绘制.gsp”，利用“轨迹”的功能生成“永久性”内旋轮线（图 6.1-5）。

3．修改参数 n 的数值，观察所绘制内旋轮线的变化情况；新建参数 $a=1.2$，将课件中的计算量 $\dfrac{(n-1)\cdot AB}{n}$ 修改为 $\dfrac{(n-a)\cdot AB}{n}$，观察所绘制内旋轮线的变化情况；对参数 $a=1.2$ 再进行调整，观察所绘制内旋轮线的变化情况。将观察的情况记录保存。

4．尝试设计“外旋轮线的绘制.gsp”课件。

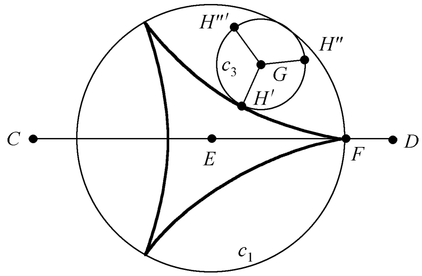


图 6.1-5

外旋轮线是指一小圆在一固定大圆外部，沿大圆外侧滚动（不是滑动）时，小圆上一定点的轨迹。

【经验点拨】

该课件的设计要注意动小圆在沿定大圆周内侧滚动时，动小圆的转动方向与前进方向应该一致。计算量“$-\dfrac{\text{弧}FH\text{的长度}}{\pi\cdot\text{动圆半径}}\times 180^\circ$”前面的负号，其作用是让动小圆转动方向为逆时针方向。

6.2 空间曲线的绘制

【实验内容】

根据曲线的定义及相关性质，绘制圆柱螺旋线、维维安尼线等空间曲线。

6.2.1 实验 1 圆柱螺旋线的绘制

圆柱螺旋线是一个质点一方面绕一条轴线做等角速度的圆周运动，另一方面做平行于轴线的等速直线运动所形成的轨迹。

【实验思路】

由于圆柱螺旋线运动是由匀速直线运动和匀速圆周运动合成的运动，因此，可在线段 AB 上取点 C，一方面将点 C 在 AB 上的运动通过转换，变为点在圆周上的运动并映射成点在椭圆上的运动；另一方面将点 C 在 AB 上的运动映射成椭圆上的点在垂直椭圆所在平面的方向上的直线运动，并将两种运动合成，得到圆柱螺旋线。

【实验设计】

1．作铅直线段 AB，使点 A 在下、点 B 在上；在线段 AB 取点 C。计算 A、B 两点的距离，计算 A、C 两点的距离；计算 AC 与 AB 的比 $\dfrac{AC}{AB}$。

2．新建参数 $n=5$，计算 $\frac{AC}{AB}\cdot 360°\cdot n$ 的值。

3．作线段 DE，在 DE 上取点 F，作线段 DF；分别计算 DE 和 DF 的距离。

4．在窗口中央偏下的地方取点 G，以 G 为圆心、DE 为半径作圆 c_1；以 G 为圆心、DF 为半径作圆 c_2。

5．在圆 c_1 上取点 H，点 G 标记为中心；以 $\frac{AC}{AB}\cdot 360°\cdot n$ 为旋转角，将点 H 旋转得旋转像点 H'。

6．作线段 GH'，交圆 c_2 的于点 I，过点 H' 作线段 AB 的平行线 j，过点 I 作线段 AB 的垂线 k；作直线 j 和 k 的交点 J。

7．将线段 AC 标记为向量；将点 J 按标记向量平移得平移像点 J'（图 6.2-1）。

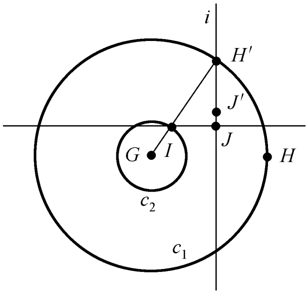


图 6.2-1

8．追踪点 J'。设置点 C 沿着线段 AB 慢速向前运动一次的动画按钮，将动画标签设为“绘制圆柱螺旋线”。

9．按“内旋轮线的绘制”课件中的方法设置“复位”按钮。隐藏多余的对象。

10．将以上制作的课件以“圆柱螺旋线的绘制.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行“圆柱螺旋线的绘制.gsp”课件。

2．观察圆柱螺旋线的动态绘制。修改课件“圆柱螺旋线的绘制.gsp”，利用“轨迹”的功能生成“永久性”圆柱螺旋线（图 6.2-2）。

3．尝试设计“能伸缩的弹簧.gsp”课件。

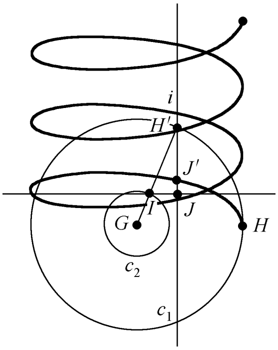


图 6.2-2

【经验点拨】

修改课件“圆柱螺旋线的绘制.gsp”，利用“轨迹”的功能生成“永久性”圆柱螺旋线后，如果让铅直线段 AB 的端点 B 向端点 A 靠近，圆柱螺旋线会沿铅直方向压缩。因此，若将 A、B 置于铅直直线上，固定点 A 而使点 B 在一定范围内往复运动，则该圆柱螺旋线会像弹簧一样反复压缩放松。

6.2.2 实验 2 维维安尼线的绘制

维维安尼线是由一个半径为 R 的球面与一个半径为 $r=\dfrac{R}{2}$ 的圆柱面相交而形成的交线。建立空间坐标系后，维维安尼线可表示为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ \left(x-\dfrac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 \end{cases}$。

【实验思路】

维维安尼线上的任一点都在球面上，都可以视为圆柱面的直母线与由该直母线和 z 轴所确定平面截球面所得大圆的交点。故设计上可考虑在 XOY 平面截圆柱面所得的圆上任取一点，作过此点的直母线，再作过此点的直母线与 z 轴所确定平面截球面所得大圆，求出直母线与大圆的两个交点，分别选定两个交点作轨迹（驱动点为 XOY 平面截圆柱面所得圆上的那点），即得维维安尼线。

【实验设计】

1．作水平线段 AB，作线段 AB 的中点 C，在线段 AB 的 CB 段上取点 D。以点 C 为圆心，B、D 两点为圆周上的点分别作圆 c_1、c_2。在圆 c_1 上取点 E，连 CE 交圆 c_2 于点 F。以点 C 为中心，将点 E、F 旋转 $90°$ 得旋转像点 E'、F'；过 E、E' 两点分别作线段 AB 的垂线 j 和 k，过 F、F' 两点分别作线段 AB 的平行线 l 和 m；作直线 j 和 l、k 和 m 的交点 G、H。以点 C 为中心，将点 G、H 旋转 $180°$ 得旋转像点 G'、H'，连 GG'、HH'。过点 C 作线段 AB 的垂线 n，交圆 c_1 于点 I、J，隐藏垂线 n，作线段 IJ。保留线段 AB、GG'、HH'、IJ 和点 C、D、E 及圆 c_1，隐藏其余对象。若以 GG' 为 x 轴、HH' 为 y 轴、IJ 为 z 轴，则线段 GG'、HH'、IJ 构成了一个视角可调的、可绕 z 轴旋转的空间直角坐标系；移动点 D 可调整视角，沿圆周拖动点 E 可使坐标系统绕 z 轴旋转。选定点 E 和点 G，单击【构造】菜单中【轨迹】菜单项，得曲线 l_1，曲线 l_1 就是 XOY 平面截球面所得的大圆（图 6.2-3）。

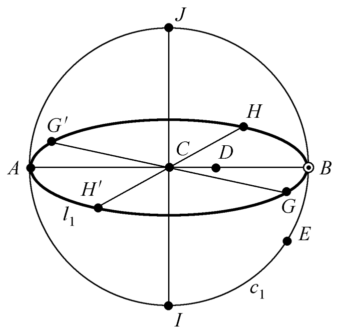


图 6.2-3

2．将点 H' 的标签改为 H_1，点 G' 的标签改为 G_1。以点 C 为中心，将点 H、H_1 按缩放比

$\frac{1}{2}$缩放，得点H'、H_1'。在以KL为边的正方形中作内切圆；在圆上取点M，过点M作KL的垂线交KL及其对边于点N、O，计算线段KN与KL的比$\frac{KN}{KL}$及NM与NO的比$\frac{NM}{NO}$。以点H'为中心，将点H_1'按缩放比$\frac{KN}{KL}$缩放得点H_1''；以点C为中心，将点G按缩放比$\frac{NM}{NO}$缩放得点G'；过点H_1''作GG_1的平行线o，过点G'作HH_1的平行线p，作直线o、p的交点P；选定点M和点P，单击【构造】菜单中【轨迹】菜单项，得曲线l_2（图 6.2-4）。曲线l_2就是XOY平面截圆柱面所得圆。保留曲线l_2及步骤 1 中保留的诸元素，隐藏其余对象。

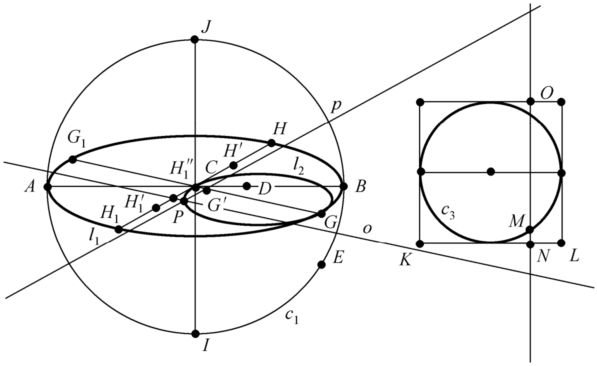


图 6.2-4

3．在曲线l_2上任取点Q，过点Q和点C作直线q，交大圆曲线l_1于点R、S，作线段RS，隐藏直线q。用步骤 2 中作XOY平面截圆柱面所得圆的方法，作过点R、S的大圆l_3。保留点R、S和大圆l_3，隐藏多余的对象。过点Q作线段IJ的平行线s，交大圆l_3于点U、V，保留点U、V，隐藏直线s（图 6.2-5）。

4．选定点Q和点U，单击【构造】菜单中【轨迹】菜单项，得曲线l_4，曲线l_4就是位于上半球面上的维维安尼线。同理可作位于下半球面上的维维安尼线（图 6.2-6）。

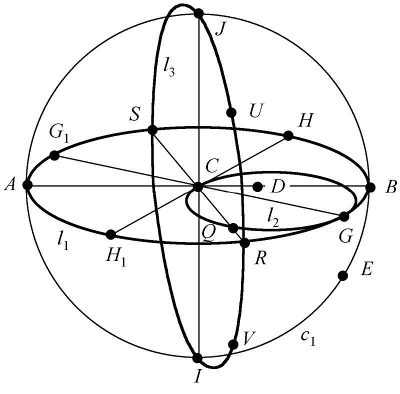


图 6.2-5

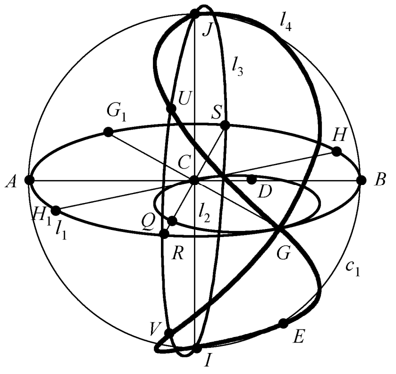


图 6.2-6

5．将以上制作的课件以“维维安尼线的绘制.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行“维维安尼线的绘制.gsp”课件。

2．移动点D调整视角，沿圆周拖动点E使坐标系绕z轴旋转，从不同的角度观察维维安尼线。

3．尝试设计绘制球心在坐标原点，半径为1的球面$x^2+y^2+z^2=1$与母线平行于z轴的抛物柱面$y=x^2$的交线的课件。

【经验点拨】

以上维维安尼曲线的绘制利用了维维安尼线是球面与圆柱面的交线，而交线上的每一点都在球面的一个大圆上，也都在柱面的一条直母线上的特性，通过求作球面大圆与柱面直母线交点的轨迹，绘制了维维安尼线。这个方法也可以用来绘制球面与其他柱面的交线。值得注意的是，方法虽然直观、易理解，但由于作法中三次通过作圆构造椭圆，占用大量系统资源，以致最后利用轨迹功能绘制维维安尼线时，要等待较长时间。严重时，甚至难以移动点D或拖动点E以调整观察维维安尼线的视角。

事实上，可用以下方法绘制维维安尼线（设球面方程为$x^2+y^2+z^2=5^2$）。

保留“维维安尼线的绘制.gsp”课件中的步骤1、2、4，将步骤3改为：

3．以点C为中心，将点G、H、J按缩放比$\dfrac{1}{5}$缩放，得点G'、H'、J'。在曲线l_2上任取点Q，过点Q作线段HH'的平行线q，交线段GG'于点S，作线段GG'的平行线r，交线段HH'于点R。计算线段CS与CG'的比$\dfrac{CS}{CG'}$及CR与CH'的比$\dfrac{CR}{CH'}$；计算$\dfrac{CJ'}{CJ}\cdot\sqrt{5^2-\left(\dfrac{CS}{CG'}\right)^2-\left(\dfrac{CR}{CH'}\right)^2}$。以点$C$为中心，将点$J$按缩放比$\dfrac{CJ'}{CJ}\cdot\sqrt{5^2-\left(\dfrac{CS}{CG'}\right)^2-\left(\dfrac{CR}{CH'}\right)^2}$缩放得点$J'$，将此点的标签改为$T$。将线段$CT$标记为向量，将点$Q$按标记向量平移得平移像点$Q'$，将点$Q'$的标签改为$U$；将线段$TC$标记为向量，将点$Q$按标记向量平移得平移像点$Q'$，将点$Q'$的标签改为$V$。

经过这样的改动，最后利用轨迹功能绘制维维安尼线时，用时较短；移动点D或拖动点E以调整观察维维安尼线的视角方位时，也变得更加流畅。改动的步骤3中，点G'、H'、J'是三坐标轴上的单位点；$\sqrt{5^2-\left(\dfrac{CS}{CG'}\right)^2-\left(\dfrac{CR}{CH'}\right)^2}$即点$Q$在$XOY$平面的二维坐标代入上半球面方程$z=\sqrt{5^2-x^2-y^2}$右边的计算量。这种方法适用于母线方向垂直于某一坐标平面的柱面与方程可表示为同一坐标面两个坐标显函数的曲面交线的绘制。

实验 7　空间曲面的构建

空间曲面的绘制是空间解析几何的一个重要学习内容。掌握一种计算机绘制曲面的方法，拥有一个能“数学地”绘制空间曲面的工具，对于认识曲面、培养数学创新能力有着重要的作用和意义。

【实验目的】

理解曲面绘制基础网格构建的思想方法，掌握曲面绘制基础网格工具构建的技巧和利用该工具绘制曲面网状图的方法。通过绘制曲面，加深对曲面性质的理解掌握。

7.1　曲面绘制的基础网格工具

几何画板中曲线和曲面的绘制，主要使用【构造】菜单中的【轨迹】菜单项，利用该菜单作轨迹，实际上是将一直线、圆或曲线上的动点（具有一个自由度的点）作为原像，通过一一对应，将原像映射得到平面或空间中的图形。使映射得到的图形能构成曲面（准确地说是网状曲面）的一种办法，是寻求能将一线段映射为由两组相互正交平行线组成的网格的方法。利用这个方法建立基础网格，就可以很方便地绘制三维曲面（网状图）。

【实验内容】

构建一个由一线段映射为由两组相互正（斜）交平行线组成的网格，可以此网格作为 XOY 平面，绘制由 $z = f(x, y)$ 确定的曲面的网状图。

【实验思路】

建立能将线段上具有一个自由度的点映射为正（斜）交网格的两个计算量，以这两个计算量为自变量，形成绘制 XOY 平面基础网格的工具。

【软件技术要点】

1．函数 $\mathrm{trunc}(n \cdot t)$ 的使用。

2．将一直线映射为正（斜）交网格的方法。

3．【构造】菜单中的【轨迹】菜单项的使用。

【实验设计】

1．用画线工具作水平线段AB，同时作线段AB的中点C；用选择工具选定A、C，单击【度量】菜单中的【距离】，求出A、C两点的距离，用同样的方法求出A、B两点的距离；用画点工具在线段AB上取点D，选定A、D，单击【度量】菜单中的【距离】，求出A、D两点的距离。

2．用鼠标依次选定A、B、D三点，单击【度量】菜单中的【比】，计算AD、AB的比$\dfrac{AD}{AB}$。选定$\dfrac{AD}{AB}$，右击弹出度量结果属性对话框，将标签设为s，即以s表示比值$\dfrac{AD}{AB}$。

3．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数$n=20$。

4．单击【数据】菜单中的【计算】，计算$\operatorname{trunc}(n\cdot s)$、$\dfrac{\operatorname{trunc}(n\cdot s)}{n}$和$n\cdot s-\operatorname{trunc}(n\cdot s)$。

5．单击【数据】菜单中的【计算】，依次计算$\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AC-AD)}{2}$、$\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AD-AC)}{2}$、$\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AC-AD)}{2}\cdot 2\cdot\left(\dfrac{\operatorname{trunc}(n\cdot s)}{n}-0.5\right)+\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AD-AC)}{2}\cdot(n\cdot s-\operatorname{trunc}(n\cdot s))$和$\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AC-AD)}{2}\cdot(n\cdot s-\operatorname{trunc}(n\cdot s))+\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AD-AC)}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{\operatorname{trunc}(n\cdot s)}{n}$。

6．用画线工具作水平线段EF，用选择工具选定点E，单击【变换】菜单中的【标记中心】（也可双击点E），将点E标记为旋转中心。

7．用选择工具选定点F，单击【变换】菜单中的【旋转】，弹出旋转对话框，将旋转参数设置为固定角度$90°$，单击“旋转”按钮得旋转像点F'；选定点F'，右击弹出点F'属性对话框，将F'的标签改为G；作线段EG。

8．用选择工具选定点E，单击【变换】菜单中的【标记中心】（也可双击点E），将点E标记为旋转中心；选定点F，单击【变换】菜单中的【缩放】，弹出缩放对话框，单击$\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AC-AD)}{2}\cdot 2\cdot\left(\dfrac{\operatorname{trunc}(n\cdot s)}{n}-0.5\right)+\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AD-AC)}{2}\cdot(n\cdot s-\operatorname{trunc}(n\cdot s))$，将其设为缩放参数标记比，单击“缩放”按钮得缩放像点F'；选定点G，单击【变换】菜单中的【缩放】，弹出缩放对话框，用鼠标单击$\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AC-AD)}{2}\cdot(n\cdot s-\operatorname{trunc}(n\cdot s))+\dfrac{1-\operatorname{sgn}(AD-AC)}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{\operatorname{trunc}(n\cdot s)}{n}$，将其设为缩放参数标记比，单击“缩放”按钮得缩放像点G'。

9．选定点F'及线段EG，单击【构造】菜单中的【平行线】，过点F'作线段EG的平行线j；用同样的方法过点G'作线段EF的平行线k；双击j、k的交点处，作两线的交点P（图 7.1-1）。

10．选定D、P两点，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得由两组相互正交平行线组成的网格（图 7.1-2）。

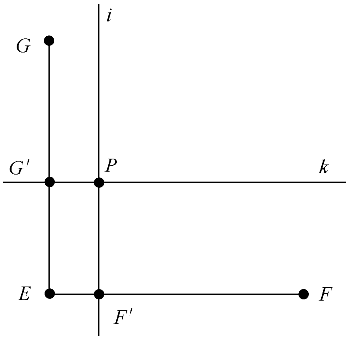


图 7.1-1

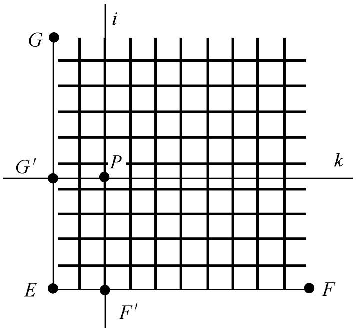


图 7.1-2

以上方法绘制出的网格平行线组还存在缺陷，两组平行线的长度均未能对齐，形成方格网。为了解决这个问题，要增加下面的微调量。

11．用画线工具作线段 HI，同时作 HI 的中点 J，在 HI 上取点 K；计算比值 $\dfrac{HK}{HJ}$，选定 $\dfrac{HK}{HJ}$，右击弹出度量结果属性对话框，将比值 $\dfrac{HK}{HJ}$ 的标签改为 k。

12．计算 $\dfrac{AD-\dfrac{k}{n\cdot n}}{AB}$，将其标签修改为 t。

13．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数 $a=0.500$、$b=1.000$、$c=1.000$、$d=0.000$、$e=0.000$、$f=1.000$，并将这 6 个参数的精度均设为千分之一。

14．将 $\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AC-AD)}{2}\cdot 2\cdot\left(\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot s)}{n}-0.5\right)+\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AD-AC)}{2}\cdot(n\cdot s-\mathrm{trunc}(n\cdot s))$ 和 $\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AC-AD)}{2}\cdot(n\cdot s-\mathrm{trunc}(n\cdot s))+\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AD-AC)}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot s)}{n}$ 中的计算量 s 以计算量 t 代替。

15．再修改 $\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AC-AD)}{2}\cdot 2\cdot\left(\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{n}-0.5\right)+\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AD-AC)}{2}\cdot(n\cdot t-\mathrm{trunc}(n\cdot t))$ 的值，将 $\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{n}-0.5$ 中的 0.5 改为参数 a，将 $n\cdot t-\mathrm{trunc}(n\cdot t)$ 改为 $b\cdot\left(n\cdot t-\mathrm{trunc}(n\cdot t)+\dfrac{c}{n}-\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{1600}\right)$，也即将 $\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AC-AD)}{2}\cdot 2\cdot\left(\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{n}-0.5\right)+\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AD-AC)}{2}\cdot(n\cdot t-\mathrm{trunc}(n\cdot t))$ 改为 $\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AC-AD)}{2}\cdot 2\cdot\left(\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{n}-a\right)+\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AD-AC)}{2}\cdot b\cdot\left(n\cdot t-\mathrm{trunc}(n\cdot t)+\dfrac{c}{n}-\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{1600}\right)$，为方便起见，将此值的标签改为 u。

16．类似地，再修改 $\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AC-AD)}{2}\cdot(n\cdot t-\mathrm{trunc}(n\cdot t))+\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AD-AC)}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{n}$ 的

值，将式中的 $n\cdot t-\mathrm{trunc}(n\cdot t)$ 改为 $f\cdot\left(n\cdot t-\mathrm{trunc}(n\cdot t)+\dfrac{d}{n}-\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{1600}\right)$，在 $\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{n}$ 后面增加一个微调量 $-e$，即将 $\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AC-AD)}{2}\cdot(n\cdot t-\mathrm{trunc}(n\cdot t))+\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AD-AC)}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{n}$ 改为 $\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AC-AD)}{2}\cdot f\cdot\left(n\cdot t-\mathrm{trunc}(n\cdot t)+\dfrac{d}{n}-\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{1600}\right)+\dfrac{1-\mathrm{sgn}(AD-AC)}{2}\cdot 2\cdot\left(\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{n}-e\right)$，将此值的标签改为 v。

以上修改，新计算量 t 在 s 值的分子部分添加了微调量 $-\dfrac{k}{n\cdot n}$，其作用是对网格中最后绘制的平行线进行修正。在计算量 $n\cdot t-\mathrm{trunc}(n\cdot t)$ 中添加微调量 $\dfrac{c}{n}$ 和 $-\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{1600}$，并乘以一个系数 b（或 f），即把原计算量改为 $b\cdot\left(n\cdot t-\mathrm{trunc}(n\cdot t)+\dfrac{c}{n}-\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{1600}\right)$，其作用是使平行线对齐；这里，微调量 $-\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{1600}$ 的分母应与网格线（轨迹）属性图像的采样数量一致，设为 1600 后，当 n 取能整除 1600（图像的采样数量为 1600 时）且不大于 100 的整十数时，都能获得理想的平行线对齐。在 $\dfrac{\mathrm{trunc}(n\cdot t)}{n}$ 后分别增加的微调量 $\dfrac{c}{n}$（或 $\dfrac{d}{n}$）的作用，是将平行线组右移（或上移）一个间距的距离，使网格的行列数均为 $\dfrac{n}{2}-1$（网格线数行列均为 $\dfrac{n}{2}$）。

调整新建参数 a，可使铅直平行线组左右移动，调整 b，可调整水平平行线组的长度，调整 c，可使水平平行线组左右移动；调整 d，可使铅直平行线组上下移动、调整 e，可使水平平行线组上下移动，调整 f，可调整铅直平行线组的长度。

进行以上修改后，移动点 K，可按线段方向逐条移动某些平行线段，配合以上参数的微调，即可得到一个间距和对齐都很理想的正交基础网格(图 7.1-3)。利用这个基础网格，就可很方便地绘制三维曲面的网状图。

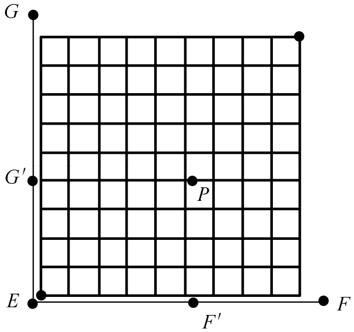


图 7.1-3

7.2　3D 坐标系的一种构建

要进行 3D 作图，首先要构建 3D 坐标系。可用以下的方法，构建一个 XOY 平面与视平面的夹角可调的、x 轴和 y 轴可绕 z 轴旋转、z 轴的方向可调的 3D 坐标系。

【实验内容】

构建一个 XOY 平面与视平面的夹角可调的、x 轴和 y 轴可绕 z 轴旋转、z 轴的方向可调的 3D 坐标系。

【实验思路】

取定 z 轴的方向；将垂直相交的 x 轴和 y 轴置于一个圆上，使 x 轴和 y 轴可沿圆绕行，再把 x 轴和 y 轴映射到一个椭圆上，形成斜二测水平放置的直角坐标系。

【软件技术要点】

【构造】菜单中的【轨迹】菜单项的使用。

【实验设计】

1．制作控制盘。在窗口左上侧取一点 A，利用【变换】菜单中的【平移】命令，将点 A 向右平移 1cm 得像点 A'；以点 A 为圆心、点 A' 为圆上的点作圆 c_1。在圆 c_1 上取三点 B、C、D，用画线工具作线段 AA'、AB、AC、AD，3D 坐标系视角及旋转角控制盘完成。后面将以 AB 控制 XOY 平面与视平面的夹角，以 AC 控制 x 轴和 y 轴绕 z 轴的旋转角，以 AD 控制 z 轴的方向（图 7.2-1）。

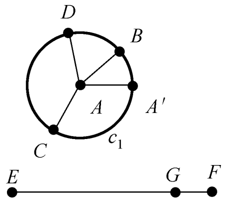


图 7.2-1

2．设置比例尺。用画线工具作线段 EF，在线段 EF 取点 G。后面将以线段 EG 的长度作 3D 坐标系的单位长度。

3．在屏幕上适当的位置取点 H，以点 H 为圆心、以 EG 的长度为半径作圆 c_2。过点 H 作 AD 的平行线 j，作 j 与圆 c_2 的交点 I，用【显示】菜单中的【隐藏平行线】命令隐藏直线 j；作线段 HI。过点 H 作线段 HI 的垂线 k，设 k 与圆 c_2 的交点分别为 J、K，其中 K 为使有向角 $\angle KHI = 90^\circ$ 的交点。过点 H 作 AC 的平行线 l，作 l 与圆 c_2 的交点 L，双击点 H 将其标记为中心后，利用【变换】菜单中的【旋转】命令，将 L 绕点 H 旋转 90° 得像点 L'（图 7.2-2）。

4．过点 H 作 AB 的平行线 m，作 m 与圆 c_2 的交点 M，过点 M 作直线 k 的垂线，交 k 于点 N，利用【度量】菜单中的【比】命令计算线段 NM 和 HI 的比值 $\dfrac{NM}{HI}$。过点 L 及点 L' 分别作直线 k 的垂线，交 k 于点 P、Q，将点 P 标记为中心，将点 L 按标记比值 $\dfrac{NM}{HI}$ 缩放得像点 L'，将此点标签改为 X；用同样的方法将点 L' 进行缩放，得像点 L''，将此点标签改为 Y（图 7.2-3）。

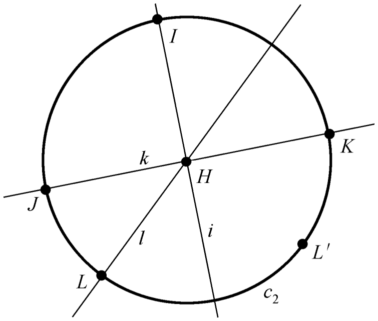


图 7.2-2

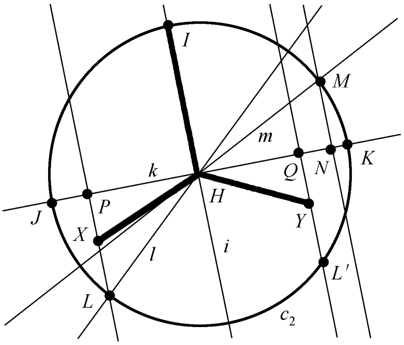


图 7.2-3

5．保留控制盘、比例尺及线段 HI、点 X、点 Y，利用【显示】菜单中的【隐藏对象】命令隐藏其余对象。将点 H 的标签改为 O，将点 I 的标签改为 Z，作线段 OX、OY；将线段 OX、OY、OZ 改为粗线条，并将颜色设置为红色，3D 坐标系制作完成（图 7.2-4）。

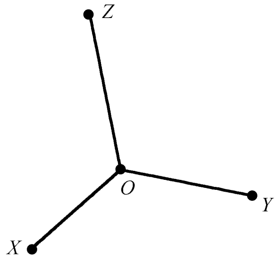


图 7.2-4

7.3 曲面网状图的绘制

【实验内容】

构建一个由基础网格和 3D 坐标系合成的曲面网状图绘制工具；利用此工具绘制由 $z=f(x,y)$ 确定的空间曲面的网状图。

【实验思路】

将基础网格构建在 3D 坐标系的 XOY 平面上，形成绘制曲面网状图的 3D 基础网格坐标系，以基础网格的两个计算量为基础建立坐标变量 x 和 y，通过曲面方程 $z=f(x,y)$ 确定曲面上的动点，再利用【构造】菜单中的【轨迹】菜单绘制曲面。

以绘制双曲抛物面 $z=x^2-y^2$ 为例。

【软件技术要点】

1．【变换】菜单中的【标记向量】菜单项的使用。

2.【构造】菜单中的【轨迹】菜单项的使用。

仅有基础网格，还不能直接使用轨迹功能作三维曲面网状图，必须在基础网格基础上形成三维坐标系，才能作三维曲面网状图。将基础网格和 3D 坐标系有机地结合起来，能使绘制的三维曲面网状图视角可调并可绕 z 轴旋转。

前面基础网格建立中得到的计算量 u 和 v，其取值范围都是 $(0,1)$，如果直接以 u 和 v 为坐标变量按上节的方法在 3D 坐标系的 x 轴和 y 轴上建立基础网格，则网格仅出现在 XOY 平面的第一象限，这样的坐标系显然无法适应一般三维曲面图的绘制，因此在 3D 坐标系上建立基础网格时，必须将 u 和 v 做相应的转换。

【实验设计】

3D 曲面绘制基础网格的合成。

1．按“3D 坐标系的构建”中的方法建立 3D 坐标系 $OXYZ$ 。

2．按“曲面绘制的基础网格工具”建立的方法建立基础网格并求出计算量 u 和 v 。

3．计算 $2\cdot(u-0.5)$ 和 $2\cdot(v-0.5)$，并把它们的标签分别改为 x 和 y 。

4．将 3D 坐标系 $OXYZ$ 的原点 O 标记为缩放中心，以 x 为缩放参数标记比，将点 X 缩放得点 X'；以 y 为缩放参数标记比，将点 Y 缩放得点 Y' 。

5．过点 Y' 作 OX 的平行线 j，过点 X' 作 OY 的平行线 k，作两直线 j 和 k 的交点 W 。（图 7.3-1）。

6．将以上制作的课件以“3D 曲面绘制基础网格.gsp”保存。

显然，以上建立的 3D 曲面绘制基础网格，点 W 在坐标系中的坐标为 $(x,y,0)$。利用此坐标系，即可方便地绘制曲面的网格图。事实上，若以点 W 为被驱动点，当驱动点 D 在 AB 上移动时，W 即在 XOY 平面上绘出以点 O 为中心且网格线分别平行于 OX 和 OY 的网格。因此，要绘制曲面 $z=f(x,y)$ 时，只需计算 $z=f(x,y)$ 的值，然后在坐标系中确定坐标为 $(x,y,f(x,y))$ 的点 P，并以点 P 为被驱动点，即可利用轨迹功能作出相应的曲面。确定点 P 时，只需计算 $z=f(x,y)$ 的值，然后将 3D 坐标系 $OXYZ$ 的原点 O 标记为缩放中心，以计算量 z 为缩放参数标记比，将点 Z 缩放得点 Z'，再标记向量 OZ'；将点 W 按标记向量平移，得点 W'，点 W' 就是坐标为 $(x,y,f(x,y))$ 的点，将点 W' 的标签改为 P 即可（图 7.3-2）。

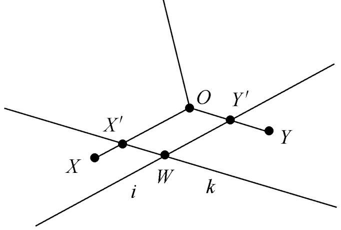


图 7.3-1

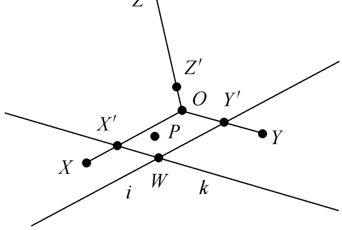


图 7.3-2

【实验要求】

1．运行课件“3D 曲面绘制基础网格.gsp”。

按以上基础网格与 3D 坐标系合成的方法建立 3D 基础网格坐标系，并算出计算量 x 和 y 。

2．计算 x^2-y^2 ，并将其标签改为 z ，确定点 $P(x,y,f(x,y))$ ，绘制双曲抛物面 $z=x^2-y^2$ 的网格图（图 7.3-3）。保存所绘制曲面的网格图。

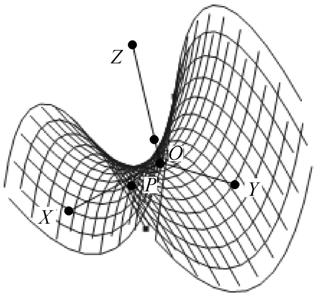


图 7.3-3

3．利用 3D 曲面绘制基础网格绘制其他曲面（如 $z=-2x^3+2y^2$ 等）的网格图并保存。

【经验点拨】

以上绘制出来的曲面网格图，由于绘图的采样数量较小，图像的质量较差，可以加大绘图的采样数量（加大到 1600），并且改变基础网格参数调整网格线的长度，以获得理想的图像；调整 3D 坐标系控制盘中 AB 、 AC 和 AD 的角度，使曲面获得更好的视角（图 7.3-4）。

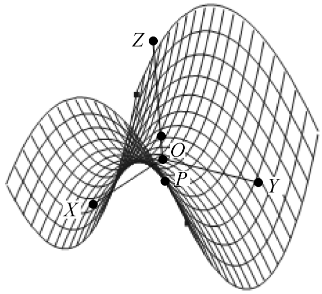
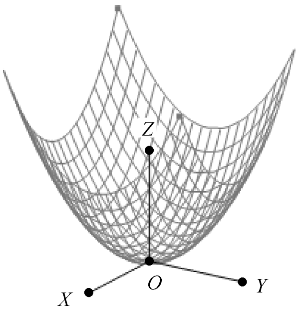


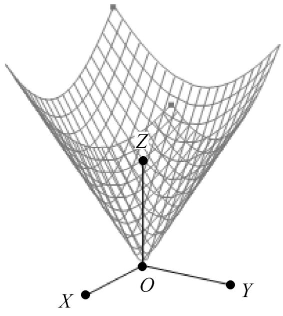
图 7.3-4

在以上利用“3D 曲面绘制基础网格”绘制曲面网格图的基础上，可以很容易绘制出其他曲面的网格图（图 7.3-5～图 7.3-8），只要把计算量 $z=x^2-y^2$ 改为其他曲面的显式表达式 $z=f(x,y)$ 即可。要注意的是，如果曲面的显式表达式 $z=f(x,y)$ 为双值函数，则需要对每个单值函数都绘制其对应的曲面网格图。



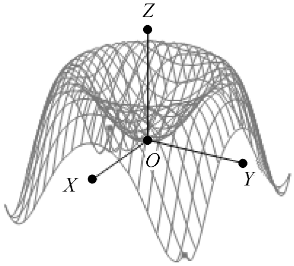
$z=x^2+y^2$

图 7.3-5



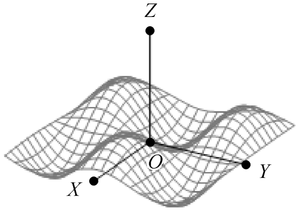
$z=1.5\sqrt{x^2+y^2}$

图 7.3-6



$z=0.6\sin 3(x^2+y^2)$

图 7.3-7



$z=0.6\sin 3x\cdot 0.4\cos 5y$

图 7.3-8

实验 8　旋转曲面的构建

旋转曲面是一种常见的曲面，旋转曲面的常见构建方法有两种：一是由一条空间曲线绕旋转轴一周生成；二是由通过动点 M 的纬圆生成，当动点 M 遍历整个母线 Γ 时，就得出旋转曲面的所有纬圆，这些纬圆生成旋转曲面。

【实验目的】

掌握旋转曲面由曲线绕轴旋转生成和由动纬圆生成的两种构建方法，通过对旋转曲面的绘制，加深对旋转曲面性质的理解掌握。

8.1　任意曲线的绘制

任意曲线绕旋转轴旋转一周都可以生成旋转曲面，因此，若要生成形状各异的旋转曲面，首先要解决形成任意曲线的方法问题。由于几何画板没有绘制任意曲线的功能，故考虑用类贝塞尔曲线绘制方法及贝塞尔曲线绘制方法形成任意曲线。

【实验内容】

用类贝塞尔曲线绘制方法及贝塞尔曲线绘制方法，构建“S”形曲线。

【实验思路】

以线段上一动点为中心，将线段外一定点按一个可连续变动的比进行缩放，得缩放像点，作此点的轨迹，得类贝塞尔曲线；两条弯曲方向不同的类贝塞尔曲线即可构成“S”形曲线。

以线段上一动点的分割比为缩放比，在连续折线（或若干线段）上确定各阶控制点，通过轨迹的方法绘制贝塞尔曲线。

【实验设计 1】

1．用画线工具作线段 AB，用画点工具在线段 AB 上作点 C、点 D。

2．用选择工具依次选定 A、C、D 三点，单击【度量】菜单中的【比】，计算线段 AD 和 AC 的比 $\dfrac{AD}{AC}$；用同样的方法计算线段的比 $\dfrac{CD}{CA}$、$\dfrac{CD}{CB}$、$\dfrac{BD}{BC}$。

3．单击【数据】菜单中的【计算】，分别计算 $\sqrt{0.6\cdot\dfrac{AD}{AC}\cdot\dfrac{CD}{CA}}$ 和 $\sqrt{0.6\cdot\dfrac{CD}{CB}\cdot\dfrac{BD}{BC}}$。

4．用选择工具选定点 D，单击【变换】菜单中的【标记中心】（或双击点 D），将点

D 标记为中心；用画点工具在线段 AB 一侧作点 E，选定点 E，单击【变换】菜单中的【缩放】，弹出缩放对话框，将缩放参数设为标记比 $\sqrt{0.6\cdot\frac{AD}{AC}\cdot\frac{CD}{CA}}$，单击“缩放”按钮得缩放像点 E'。用选择工具选定点 D 和点 E'，单击【构造】菜单中的【轨迹】，得过点 E' 的类贝塞尔曲线。

5．用画点工具在线段 AB 另一侧作点 F，选定点 F，单击【变换】菜单中的【缩放】，弹出缩放对话框，将缩放参数设为标记比 $\sqrt{0.6\cdot\frac{CD}{CB}\cdot\frac{BD}{BC}}$，单击“缩放”按钮得缩放像点 F'。用选择工具选定点 D 和点 F'，单击【构造】菜单中的【轨迹】，得过点 F' 的类贝塞尔曲线。

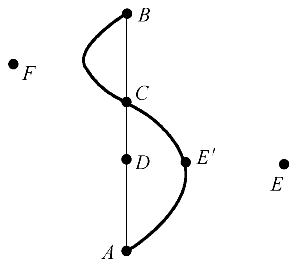


图 8.1-1

步骤 4、5 绘制的两段曲线连在一起，即形成“S”形曲线（图 8.1-1）。两个计算量 $\sqrt{0.6\cdot\frac{AD}{AC}\cdot\frac{CD}{CA}}$ 和 $\sqrt{0.6\cdot\frac{CD}{CB}\cdot\frac{BD}{BC}}$ 中的系数 0.6 是为使所生成曲线的曲率不至于太小而添加的，可以根据需要改变此值。C、D 两点在线段 AB 上的顺序会影响以上两个计算量是否有意义，缩放变换时要调整 C、D 的位置来使标记比有意义。

6．将以上制作的课件以“类贝塞尔曲线绘制.gsp”保存。

【实验设计 2】

1．用画线工具作线段 AB，用画点工具在线段 AB 上作点 C。

2．用选择工具依次选定 A、B、C 三点，单击【度量】菜单中的【比】，计算线段 AC 和 AB 的比 $\frac{AC}{AB}$。

3．用画线工具作折线 $DEFG$。用选择工具选定点 D，单击【变换】菜单中的【标记中心】（或双击点 D），将点 D 标记为中心；选定点 E，单击【变换】菜单中的【缩放】，弹出缩放对话框，将缩放参数设为标记比 $\frac{AC}{AB}$，单击“缩放”按钮，得缩放像点 E'。

4．分别以点 E、点 F 为中心，以 $\frac{AC}{AB}$ 为缩放比，将点 F、G 缩放得缩放像点 F'、G'。

5．用画线工具作线段 $E'F'$、$F'G'$，分别以点 E'、点 F' 为中心，以 $\frac{AC}{AB}$ 为缩放比，将点 F'、G' 缩放，得缩放像点 F''、G''。

6．用画线工具作线段 $F''G''$，以点 F'' 为中心，以 $\frac{AC}{AB}$ 为缩放比，将点 G'' 缩放，得缩放像点 G'''。

7．用选择工具选定点 C 和点 G'''，单击【构造】菜单中的【轨迹】，得 3 阶贝塞尔曲线（图 8.1-2）。

8．将以上制作的课件以“3 阶贝塞尔曲线绘制.gsp”保存。

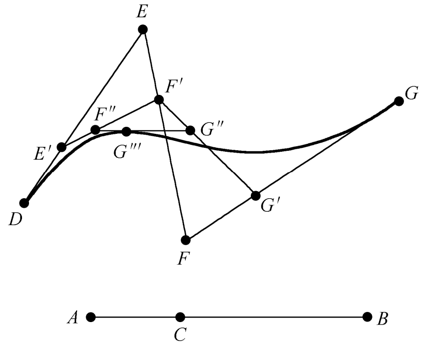


图 8.1-2

8.2　旋转轴和曲线的映射

要实现任意曲线绕旋转轴旋转一周，可以矩形的一边为轴，将矩形上的任意曲线连同矩形绕轴旋转一周。在几何画板软件中，可以旋转轴上一点为中心作椭圆，利用缩放变换的方法将曲线“粘贴”到以旋转轴和可绕中心旋转的椭圆半径为邻边的平行四边形上，当椭圆的半径绕中心旋转一周时，即可使任意曲线绕旋转轴旋转一周。

【实验内容】

矩形绕轴旋转的构建；矩形中的任意曲线到平行四边形的“粘贴”（映射）。

【实验思路】

以旋转轴上一点为中心作椭圆，作椭圆的动半径，当椭圆的动半径绕中心旋转一周时，以旋转轴和椭圆动半径为邻边的平行四边形即绕旋转轴一周。

将所选定曲线置于矩形中，在曲线任取一点，过此点作曲线所在矩形一边的垂线与该边相交，求出曲线上的点分两垂足所连线段的比，通过缩放变换，将曲线上的点映射到以旋转轴和椭圆动半径为邻边的平行四边形，利用轨迹方法在平行四边形上作选定曲线的像曲线。

【实验设计】

1．视角可调旋转轴

（1）用画线工具作线段 AB，选定 A、B 两点，单击【度量】菜单中的【距离】，计算 A、B 的距离；在线段 AB 上取点 C，用同样的方法计算 A、C 两点的距离。

（2）用画线工具（自上至下）作线段 DE，用选择工具选定线段 DE 和点 E，单击【构造】菜单中的【垂线】，过点 E 作线段 DE 的垂线 j。

（3）以点 E 为中心，以垂线 j 的方向为长轴方向、线段 DE 的方向为短轴方向，以 A、B

的距离为长半轴的长，以 A 、C 的距离为短半轴的长，作椭圆 e 。在椭圆 e 上取点 F ，作椭圆的半径 EF 。

2．“S”形曲线映射

（1）用画线工具在选定的曲线四周作矩形 $GHIJ$ ，将曲线置于矩形 $GHIJ$ 内。在曲线上取点 E ，用选择工具选定线段 GH 和点 E ，单击【构造】菜单中的【垂线】，过点 E 作线段 GH 的垂线 j ，交线段 GH 于点 L 、交线段 JI 于点 K （图 8.2-1）。

（2）用选择工具依次选定 G 、 H 、 L 三点，单击【度量】菜单中的【比】，计算线段 GL 和 GH 的比 $\dfrac{GL}{GH}$ ；用选择工具依次选定 L 、 K 、 E 三点，单击【度量】菜单中的【比】，计算线段 LE 和 LK 的比 $\dfrac{LE}{LK}$ 。

（3）作平行四边形 $PQRS$ ；选定点 P ，单击【变换】菜单中的【标记中心】（或双击点 P ），将点 P 标记为中心；选定点 Q ，单击【变换】菜单中的【缩放】，弹出缩放对话框，将缩放参数设为标记比 $\dfrac{GL}{GH}$ ，单击“缩放”按钮，得缩放像点 Q' ；选定点 Q' 和线段 PS ，单击【构造】菜单中的【平行线】，过点 Q' 作 PS 的平行线 $Q'M$ 交线段 SR 于点 M 。

（4）选定点 Q' ，单击【变换】菜单中的【标记中心】（或双击点 Q' ），将点 Q' 标记为中心；选定点 M ，单击【变换】菜单中的【缩放】，弹出缩放对话框，将缩放参数设为标记比 $\dfrac{LE}{LK}$ ，单击“缩放”按钮，得缩放像点 M' 。

（5）用选择工具选定点 E 和点 M' ，单击【构造】菜单中的【轨迹】，得过点 M' 的曲线；此曲线就是所选中曲线在平行四边形 $PQRS$ 上的映像（图 8.2-2）。

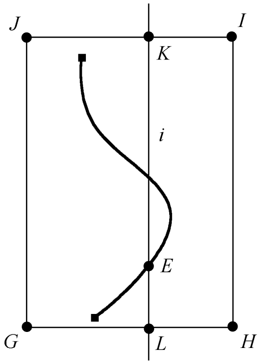


图 8.2-1

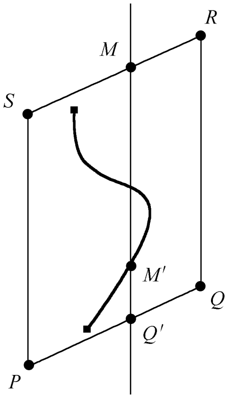


图 8.2-2

8.3　曲线绕轴旋转生成旋转曲面

任意曲线绕旋转轴旋转一周的实现，可以旋转轴上一点为中心作椭圆，利用缩放变换的方

法将曲线“粘贴”到以旋转轴和可绕中心旋转的椭圆半径为邻边的平行四边形上，驱使椭圆动半径绕椭圆中心旋转，当椭圆的半径绕中心旋转一周时，即可使任意曲线绕旋转轴旋转一周。

【实验内容】

曲线绕旋转轴生成旋转曲面的构建；与旋转轴异面的线段绕轴旋转生成单叶旋转双曲面（直纹面）的构建。

【实验思路】

以旋转轴上一点为中心作椭圆，作椭圆的动半径，以旋转轴和椭圆动半径为邻边作平行四边形；将选定曲线映射到以旋转轴和椭圆动半径为邻边的平行四边形，追踪所选曲线在平行四边形中的映像曲线，并驱使此平行四边形绕旋转轴旋转。当平行四边形绕旋转轴一周时，所选曲线移动的踪迹即构成旋转曲面。

以旋转轴上一点为中心作椭圆，作椭圆的两条动半径，使其夹角为定角；将其中一半径的端点按旋转轴的方向平移定长距离得平移像点，连接此点与另一半径的端点，得一与旋转轴异面的线段。驱使此与旋转轴异面的线段绕旋转轴旋转一周，异面线段的踪迹所生成的曲面就是单叶旋转双曲面，这是一个直纹面。

【实验设计 1】

“S”形曲线绕轴旋转生成旋转曲面。

1．按“类贝塞尔曲线绘制”或“贝塞尔曲线绘制”的方法绘制“S”形曲线。

2．按“视角可调旋转轴”绘制方法绘制视角可调的旋转轴 DE 及椭圆半径 EF 。

3．按“S 形曲线映射”的方法，将矩形中的“S”形曲线映射到以线段 DE 和 EF 为邻边的平行四边形（图 8.3-1）。在平行四边形中的“S”形曲线两端点处各作一点。

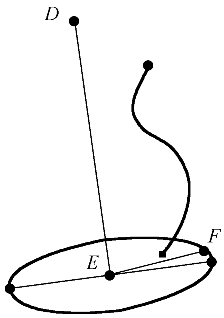


图 8.3-1

4．选定平行四边形中的曲线及曲线两端的两点，单击【显示】菜单中的【追踪对象】，将曲线及两端的两点设为被追踪对象。选定点 F ，单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】的【动画】，弹出操作类按钮运动点的属性对话框，在“动画”选项卡中将运动方向设为向后，速度设为快速，选择只播一次；在“标签”选项卡的标签文本框中输入“生成曲面”，单击“确定”按钮得“生成曲面”动画按钮。

5．依次选定点 F 和椭圆长轴的右端点，单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】的【移动】，弹出操作类按钮移动点的属性对话框，将“移动”选项卡中的移动速度设为高速，单击“确定”按钮得“移动点”按钮。选定“移动点”按钮，单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】的【系列】，弹出操作类按钮演示动作的属性对话框，在“系列按钮”选项卡中选择开始前清除所有轨迹，在标签文本框中输入“清除曲面”，单击“确定”按钮得“清除曲面”按钮。再

次选定“移动点”按钮，单击【显示】菜单中的【隐藏操作类按钮】，将“移动点”按钮隐藏。

6．将以上制作的课件以“任意曲线绕轴旋转生成旋转曲面 1.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“任意曲线绕轴旋转生成旋转曲面 1.gsp”。

2．观察任意曲线绕轴旋转生成旋转曲面的生成及清除过程。调整任意曲线的形状，观察曲面的变化情况；仔细观察调整任意曲线形状时是否能引起已生成曲面的变化。

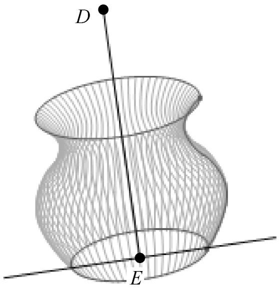


图 8.3-2

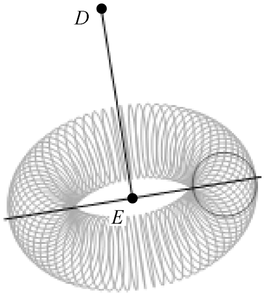


图 8.3-3

3．修改课件“任意曲线绕轴旋转生成旋转曲面 1.gsp”，利用“曲线族”的功能生成“永久性”旋转曲面。

由于几何画板 5.0 以上版本增加了曲线族的功能，允许以轨迹方法生成的曲线为生成元，形成曲线族。故可将课件“任意曲线绕轴旋转生成旋转曲面 1.gsp”中的第 4 点修改为：选定平行四边形中的曲线，选定点 F ，单击【构造】菜单中的【曲线族】，构造曲线族。依次选定曲线两端的两点及点 F ，单击【构造】菜单中的【轨迹】，分别作曲线两端的点的轨迹。选定曲线族，单击【编辑】菜单中的【属性】，弹出轨迹属性窗口，将“绘图”选项卡中“采样数量”的值增大，可得到更高质量的旋转曲面图。

删除第 5 点。将课件以“任意曲线绕轴旋转生成旋转曲面 2.gsp”保存。

【经验点拨】

运行课件“任意曲线绕轴旋转生成旋转曲面 1.gsp”，单击“生成曲面”动画按钮，即可动态绘制旋转曲面（图 8.3-2），单击“清除曲面”按钮即可将曲面清除。调整“S”形曲线中 E 、 F 两点的位置，可得到形状不同的曲面；调整点 C 在线段 AB 上的位置，椭圆两半轴的比例随之变化，就可获得不同视角的旋转曲面。

用以上方法可以很方便地将圆、抛物线、双曲线等曲线“粘贴”到可绕旋转轴旋转的平行四边形，动态展示环面、旋转抛物面、单叶旋转双曲面等旋转曲面的形成过程（图 8.3-3、图 8.3-4、图 8.3-5）。

运行以上经修改的课件“任意曲线绕轴旋转生成旋转曲面 2.gsp”，即可得到由一族曲线形成的旋转曲面。

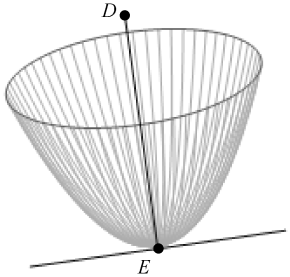


图 8.3-4

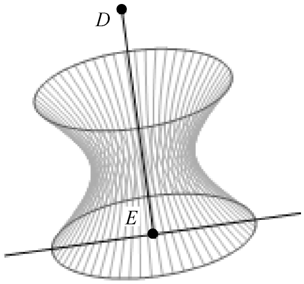


图 8.3-5

需要说明的是，几何画板中，追踪是一个被追踪对象移动时留下的踪迹。以追踪轨迹功能绘制图形，就是驱使被追踪对象按一定的规律移动，使其留下有符合图形要求的踪迹——图形。由于被追踪对象可以是点、直线型对象、圆、弧或内部，也可以是利用【轨迹】菜单作的轨迹，因此，能显式表示为 $z=f(x,y)$ 的曲面，都可以用这种方法。要注意的是，由追踪方法（“任意曲线绕轴旋转生成旋转曲面 1.gsp”的方法）形成的图形是一种“临时性”的图形，这种图形一旦由被追踪对象形成，即“脱离”了与被追踪对象的关系，不再受被追踪对象的左右；图形也不能移动，需要删除时要使用“擦除追踪踪迹”的专门命令。而用轨迹方法（“任意曲线绕轴旋转生成旋转曲面 2.gsp”的方法）作的图形是一种“永久性”的图形，这种图形作出以后，如果改变原像和映像之间的一一对应关系，则图形作出相应的改变。

以上两种方法生成的旋转曲面，其生成元“S”形曲线粘贴在通过旋转轴的平面上，因此，“S”形曲线实际上是旋转曲面的一条经线。但实际上，任何一条空间曲线在绕旋转轴旋转一周的过程中，都能生成一个旋转曲面。选择由经线生成旋转曲面，是因为经线的形成比较简单，易于实现。

【实验设计 2】

与旋转轴异面的线段绕轴旋转生成单叶旋转双曲面。

1．用画线工具在窗口右上侧作线段 AB；以点 A 为圆心、点 B 为圆上的点作圆 c。在圆 c 上取点 C，用画线工具作线段 AC。求出 $\angle BAC$ 的大小。

2．用画线工具在圆 c 下方作线段 DE；用画点工具在线段 DE 取点 F。用选择工具依次选定点 D、E、F 三点，单击【度量】菜单中的【比】，计算线段 DF 和 DE 的比 $\dfrac{DF}{DE}$。

3．用画线工具在窗口中央偏下处作水平线段 GH；以点 G 为缩放中心，将点 H 按比 $\dfrac{DF}{DE}$ 缩放得点 H'；以点 G 为圆心，以点 H 和 H' 为圆上的点分别作圆 c_1 和 c_2。用画点工具在圆 c_1 上取点 I，以点 G 为中心，以 $\angle BAC$ 为标记旋转角将点 I 旋转得点 I'。

4．用画线工具作线段 GI，交圆 c_2 于点 J。用画线工具过点 I 作 GH 的垂线 j，过点 J 作 GH 的平行线 k，双击直线 j 和 k 的相交处得交点 K；用画线工具作线段 GI'，交圆 c_2 于点 L。用画

线工具过点 I' 作 GH 的垂线 l，过点 L 作 GH 的平行线 m，双击直线 l 和 m 的相交处得交点 M 。

5．用画线工具过点 G 作 GH 的垂线 n，用画点工具在直线 n 上取点 N 。依次选定点 G 和点 N，单击【变换】菜单中的【标记向量】，将 GN 标记为向量。选定点 M，单击【变换】菜单中的【平移】，弹出平移对话框，在平移变换单选项中选择标记，单击“平移”按钮得平移像点 M' 。用画线工具作线段 KM'（图 8.3-6）。

6．用画线工具作线段 GN，分别作线段 GN 和 KM' 的中点，并作线段 GN 和 KM' 的中点的连线。隐藏除点 I、线段 GN 和 KM' 及其中点的连线、线段 GH 以外的其余对象。

7．用选择工具选定点 I 和点 K，单击【构造】菜单中的【轨迹】，得过点 K 的椭圆；用同样的方法作过点 M' 的椭圆（图 8.3-7）。

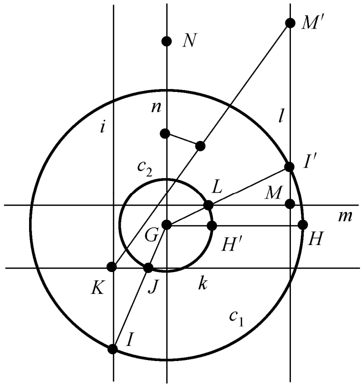


图 8.3-6

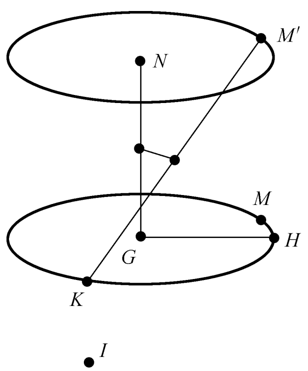


图 8.3-7

8．选定线段 KM'，单击【显示】菜单中的【追踪线段】，将线段 KM' 设为被追踪对象。选定点 I，单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】的【动画】，弹出操作类按钮运动点的属性对话框，在“动画”选项卡中将运动方向设为逆时针方向，速度设为 3.0，选择只播一次；在“标签”选项卡的标签文本框中输入“生成曲面”，单击“确定”按钮得“生成曲面”动画按钮。

9．选定点 I，单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】的【隐藏/显示】，形成“隐藏点”按钮后，打开其属性对话框，将“隐藏/显示”选项卡的动作参数设为总是隐藏对象，在标签选项卡中输入“隐藏点”，得“隐藏点”按钮。选定“隐藏点”按钮，单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】的【系列】，弹出操作类按钮演示动作的属性对话框，在“系列按钮”选项卡中选择开始前清除所有追踪轨迹，在标签文本框中输入“清除曲面”，单击“确定”按钮得“清除曲面”按钮。再次选定“隐藏点”按钮，单击【显示】菜单中的【隐藏操作类按钮】，将“隐藏点”按钮隐藏。

10．将以上制作的课件以“异面线段绕轴旋转生成单叶旋转双曲面 1.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“异面线段绕轴旋转生成单叶旋转双曲面 1.gsp”。

2．观察异面线段绕轴旋转生成单叶旋转双曲面的生成及清除过程。通过移动点 C 改变

$\angle BAC$ 的大小，通过移动点 F 调整视角，观察所生成单叶旋转双曲面的变化情况。

3．按“任意曲线绕轴旋转生成旋转曲面 2.gsp”的方法修改课件“异面线段绕轴旋转生成单叶旋转双曲面 1.gsp”，使之生成“永久性”旋转曲面。并将修改后的课件以“异面线段绕轴旋转生成单叶旋转双曲面 2.gsp”保存。

4．运行课件“异面线段绕轴旋转生成单叶旋转双曲面 2.gsp”，生成“永久性”单叶旋转双曲面（图 8.3-8）；通过改变 $\angle BAC$ 的大小和移动点 F 来调整视角，观察单叶旋转双曲面的两族直母线及腰椭圆大小的变化情况；观察并记录用此课件生成的旋转曲面的两种极限情况。

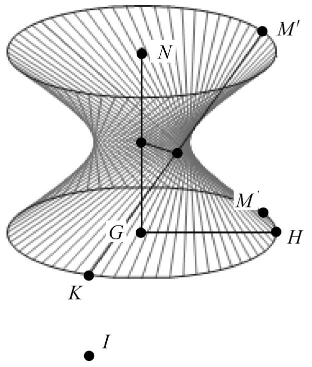


图 8.3-8

5．尝试设计一个由三维曲线（非平面曲线）绕轴旋转生成旋转曲面的课件。

【经验点拨】

设计由三维曲线（非平面曲线）绕轴旋转生成旋转曲面的课件时，可考虑类似“异面线段绕轴旋转生成单叶旋转双曲面 1.gsp”课件的设计那样，构造能绕轴旋转的 3 段（或以上）空间折线或者 2 个（或以上）异面线段，再按贝塞尔曲线绘制的方法直接在这些折线或者异面线段上绘制贝塞尔曲线，此曲线就是三维曲线（非平面曲线）。驱动此曲线绕轴旋转即可生成旋转曲面。

8.4　由纬圆变动生成旋转曲面

当用与旋转曲面的轴垂直的一组平面截旋转曲面时，得到的是一组圆。这些圆的半径大小可能不同，但所在平面都垂直于旋转轴，且圆心都在旋转轴上，因此旋转曲面可由一系列的圆构成，这些圆称为旋转曲面的纬圆。使用纬圆的方法也可以生成旋转曲面。由于当纬圆所在平面与视线不垂直时，看到的纬圆是一个椭圆，因此，可以通过一系列椭圆构成旋转曲面。

【实验内容】

纬圆变动生成旋转曲面的构建。

【实验思路】

以“ S ”形曲线上的点 M 为椭圆上的点，作出经过点 M 、所在平面与轴垂直且中心在轴上的椭圆，追踪此椭圆，当点 M 遍历“ S ”形曲线时，所产生的一系列相似的椭圆的踪迹即形成旋转曲面。

【实验设计】

1．按“贝塞尔曲线绘制”的方法绘制“S”形曲线。

2．按“视角可调旋转轴”绘制方法绘制视角可调的旋转轴DE及椭圆半径EF。

3．按“S 形曲线映射”的方法，将“S”形曲线粘贴到以线段DE和椭圆长半轴为邻边的平行四边形。

4．在“S”形曲线靠近下方的一段上取点M。

5．过点M作轴DE的垂线k，交轴DE于点O，以点O为中心、以点M为圆上的点作圆c_3。在垂线k上任意取点P，过点P作轴DE的平行线l，交圆c_3于Q、R两点。将点P标记为中心，选定Q、R两点，以“视角可调旋转轴”绘制中所作椭圆短半轴的长与长半轴的长的比为缩放比进行缩放，得缩放像点Q'和R'。选定中P、Q'两点，单击【构造】菜单中的【轨迹】，绘制半个椭圆，用同样的方法绘制椭圆的另一半（图 8.4-1）。隐藏其余对象，保留旋转轴DE、“S”形曲线、点M和通过点M的椭圆，此椭圆即通过点M的纬圆（图 8.4-2）。

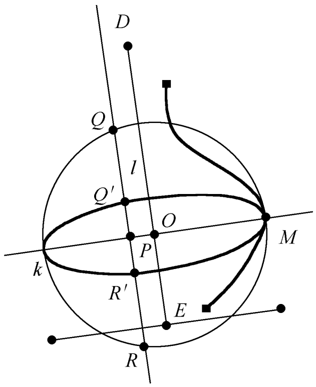


图 8.4-1

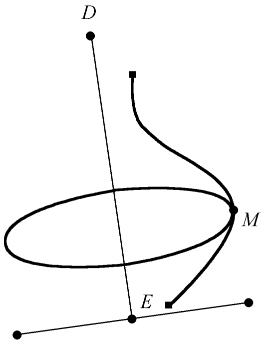


图 8.4-2

6．选定通过点M的椭圆，单击【显示】菜单中的【追踪轨迹】，将过点M的椭圆设为被追踪对象。将点M移到“S”形曲线的一个端点。

7．选定通过点M的椭圆，单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】的【隐藏/显示】，形成“隐藏轨迹”按钮后，打开其属性对话框，将“隐藏/显示”选项卡的动作参数设为总是显示对象，在“标签”选项卡中输入“显示轨迹”，得“显示轨迹”按钮。再次选定通过点M的椭圆，单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】的【隐藏/显示】，形成“隐藏轨迹”按钮后，打开其属性对话框，将“隐藏/显示”选项卡的动作参数设为总是隐藏对象，在“标签”选项卡中输入“隐藏轨迹”，得“隐藏轨迹”按钮。选定点M，单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】的【动画】，弹出操作类按钮运动点的属性对话框，在“动画”选项卡中将运动方向设为向前，速度设为中速，选择只播一次；在“标签”选项卡的标签文本框中输入“生成曲面 1”，单击“确定”按钮得“生成曲面 1”动画按钮。

8．依次选定“显示轨迹”、“生成曲面 1”、“隐藏轨迹”3 个动画按钮，单击【编辑】菜

单中的【操作类按钮】的【系列】，弹出操作类按钮演示动作的属性对话框，在“系列按钮”选项卡中将执行参数设置为依次执行，不选开始前的所有参数，动作之间暂停设为 0 秒；在标签文本框中输入“生成曲面”，单击“确定”按钮得“生成曲面”按钮。

9．选定“隐藏轨迹”动画按钮，单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】的【系列】，弹出操作类按钮演示动作的属性对话框，在“系列按钮”选项卡中选择开始前清除所有轨迹，在标签文本框中输入“清除曲面”，单击“确定”按钮得“清除曲面”按钮。

10．保留“生成曲面”和“清除曲面”按钮，隐藏其余按钮。

11．将以上制作的课件以“纬圆变动生成旋转曲面.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“纬圆变动生成旋转曲面.gsp”。

2．观察纬圆变动生成旋转曲面的生成及清除过程。

3．修改课件“纬圆变动生成旋转曲面.gsp”，使之能利用“曲线族”的功能生成“永久性”旋转曲面。

【经验点拨】

以上探讨了动态展现曲线绕轴旋转生成旋转曲面和纬圆叠合生成旋转曲面的方法。这两种方法建构图形的基础是几何画板的追踪功能。虽然由追踪功能生成的曲面是一种“临时性”的图形，这种图形一旦由被追踪对象形成，即“脱离”了与被追踪对象的关系，不再受被追踪对象的左右，因此形成的图形是不能移动和转动的。然而，追踪功能使被追踪对象留下移动过程的踪迹，为动态反映曲面的生成过程提供了可能。例中旋转曲面生成的过程是一个“透明”的过程，可以通过此过程了解旋转曲面的结构和生成的所有细节，这对于建构空间概念、培养空间想象能力及掌握曲面的形状、特征和相关性质，有着积极的意义。

实验 9　双曲抛物面的构建

二次曲面，是数学专业基础课程空间解析几何的一个重要学习内容。了解曲面生成的方法和形成过程，对于认识曲面有着重要的作用和意义，是掌握曲面的形状、特征和相关性质及培养数学创新能力的重要环节。

空间解析几何教材中，对双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ 的生成有这样的描述：如果取两条这样的抛物线，它们所在的平面互相垂直，有公共的顶点与轴，而且两条抛物线的开口方向相反，让其中一条抛物线平行于自己（与抛物线所在的平面平行）且使其顶点在另一条抛物线上滑动，那么前一条抛物线的运动轨迹便是一个双曲抛物面。

另外，如果用坐标平面 $z=0$ 去截割双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$，得到一对相交于原点的直线 $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0\\ z=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0\\ z=0\end{cases}$，如果作平行于 $z=0$ 的平面 $z=h$ 截割双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$，得到的截线总是双曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2a^2h}-\dfrac{y^2}{2b^2h}=1\\ z=h\end{cases}$。当 $h>0$ 时，所得双曲线的实轴平行于 x 轴；当 $h<0$ 时，所得双曲线的实轴平行于 y 轴。因此，双曲抛物面也可以视为由双曲线的变动（大小位置都改变）而产生的。这个双曲线在变动中，保持所在平面平行于 xOy 平面，且两顶点分别在抛物线 $\begin{cases}x^2=2a^2z\\ y=0\end{cases}$（$h>0$ 时）与 $\begin{cases}y^2=2b^2z\\ x=0\end{cases}$（$h<0$ 时）上滑动。

因此，双曲抛物面既可以由一条抛物线沿另一条抛物线滑动而生成，也可以由双曲线沿抛物线滑动而生成。

【实验目的】

掌握双曲抛物面由一条抛物线沿另一条抛物线滑动生成和由双曲线沿抛物线滑动生成两种构建方法，通过对双曲抛物面的绘制，加深对曲面性质的理解掌握。

9.1　抛物线和双曲线的基本画法

抛物线和双曲线的基本画法，是通过抛物线或双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面的基础。由于通过抛物线和双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面时，是滑动曲线的顶点沿着定曲

线滑动；而且双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面时，滑动的双曲线其大小和位置需不断改变，处于不同位置的滑动的双曲线，其实半轴的长是不一样的，因此，需要一种能根据顶点、焦参数和对称轴绘制抛物线，能根据顶点、渐近线和实半轴的长绘制双曲线的方法。又由于双曲抛物面由抛物线或双曲线沿抛物线滑动生成时，动抛物线或动双曲线与定抛物线所处的是空间中互相垂直的不同平面，因此，要展现由抛物线或双曲线生成双曲抛物面的过程，还要解决在任意放置的平面（与视线不垂直的平面）上绘制抛物线或双曲线的方法这个问题。

【实验内容】

抛物线和双曲线的几种基本画法；可绕 z 轴旋转的坐标架的建立。

【实验思路】

根据抛物线的定义或利用“抛物线可以看成到定直线的距离与到定圆的切线长相等的动点的轨迹”的性质绘制抛物线；根据双曲线的定义或利用“与双曲线实轴的平行直线被双曲线及其两条渐近线所分线段的性质”绘制双曲线；取定 z 轴的方向，将垂直相交的 x 轴和 y 轴置于一个圆上，使 x 轴和 y 轴可沿圆绕行，再把 x 轴和 y 轴映射到一个椭圆上，形成斜二测水平放置的直角坐标系。

【实验准备设计】

实验准备一　抛物线基本画法 1（根据抛物线的定义）

1．作水平线段 AB，作线段 AB 的中垂线 j。

2．在中垂线 j 取点 D；在线段 AB 取点 E，作线段 DE，作线段 DE 的中垂线 k。

3．过点 E 作线段 AB 的垂线 l，作直线 k 和直线 l 的交点 G。

4．选定点 E 和点 G，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得过点 G 的抛物线（图 9.1-1）。

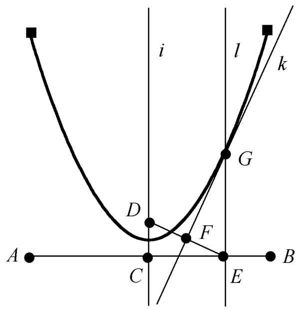


图 9.1-1

实验准备二　抛物线基本画法 2

由于抛物线也可以视为“到定直线的距离与到定圆的切线长相等的动点的轨迹”，而动点与定圆圆心的距离就是以定圆半径和动点到定直线距离（切线）为两直角边的直角三角形的斜边的长，因此，抛物线也可以按以下方法绘制。

1．作垂直线段 AB，在线段 AB 上取点 C、D。

2．计算 A、C 两点的距离 AC，计算 A、D 两点的距离 AD，计算 AC、AD 平方和的算术平方根 $\sqrt{AC^2+AD^2}$。

3．以点 C 为圆心、$\sqrt{AC^2+AD^2}$ 为半径作圆 c；过点 D 作线段 AB 的垂线 j；作圆 c 和直线 j 的交点 E 和 F。

4．选定点 D 和点 E，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得以点 A 为顶点的抛物线的一半；选定点 D 和点 F，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得抛物线的另一半（图 9.1-2）。

实验准备三　双曲线基本画法 1（根据双曲线的定义）

1．作水平线段 AB，在线段 AB 上取点 C、D。

2．以点 A 为圆心、点 C 为圆上的点作圆 c；在圆 c 上取点 E，过点 A、E 作直线 j。

3．作线段 DE，作线段 DE 的中垂线 k，作直线 k 和直线 l 的交点 G。

4．选定点 E 和点 G，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得以点 A、D 为焦点的双曲线（图 9.1-3）。

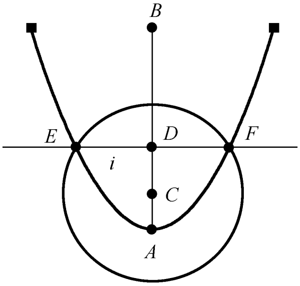


图 9.1-2

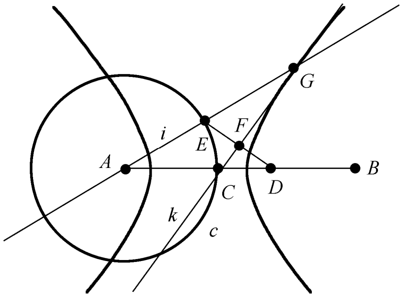


图 9.1-3

实验准备四　双曲线基本画法 2

对于双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，若过其上任一点 P 作实轴的平行线 k 交两条渐近线于点 M、N，则 $|PM|\cdot|PN|=a^2$。若设直线 k 交双曲线的虚轴于点 C，直线 k 夹于两条渐近线之间的长为 $2r$，则有 $(|CP|+r)\cdot(|CP|-r)=a^2$，从而，$|CP|=\sqrt{r^2+a^2}$。因此，双曲线也可按如下方法绘制。

1．作水平线段 AB，作线段 AB 的中点 C；在线段 AB 上取点 D。

2．过中点 C 作线段 AB 的垂线 j，在垂线 j 取点 E；过点 C 作直线 k，作直线 k 关于直线 j 的对称直线 k'。

3．过点 E 作 AB 的平行线 l 交直线 k 于 F；计算 E、F 两点的距离 EF，计算 C、D 两点的距离 CD，计算 CD、EF 平方和的算术平方根 $\sqrt{CD^2+EF^2}$。

4．以点 E 为圆心、$\sqrt{CD^2+EF^2}$ 为半径作圆 c；作圆 c 和直线 l 交的交点 G 和 H。

5．选定点 E 和点 G，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得以点 D 为一个顶点、以 AB 为实轴、以直线 k 及 k' 为渐近线的双曲线的一个分支（图 9.1-4）；选定点 E 和点 H，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得双曲线的另一个分支。

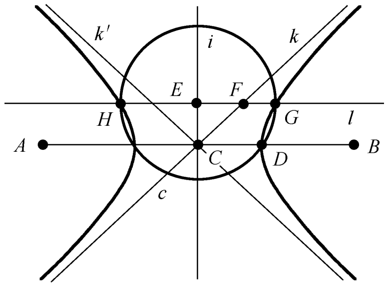


图 9.1-4

实验准备五　所在平面与视线不垂直的抛物线的绘制

将一个平面放置成不垂直于视线的位置，在作图的实现上相当于把一个矩形变为一个平行四边形。所以，在任意放置的平面上绘制抛物线，相当于把一个矩形及其内的抛物线映射为一个平行四边形及其内的相应图形，除了用缩放、平移变换的方法（“旋转曲面的构建”实验中“S”形曲线映射的方法）实现外，也可以按以下方法实现。

1．按“抛物线基本画法 1”的方法绘制抛物线。计算线段 CE 和线段 CB 的比 $\dfrac{CE}{CB}$；将 EG 标记为向量。

2．作线段 MN（不水平放置），作线段 MN 的中点 O；以点 O 为中心、以 $\dfrac{CE}{CB}$ 为缩放比将点 N 进行缩放，得缩放像点 N'；将点 N' 按标记向量 EG 平移，得平移像点 N''。

3．选定点 E 和点 N''，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得对称轴垂直放置、所在平面与视线不垂直的抛物线（图 9.1-5）。

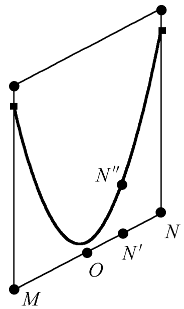


图 9.1-5

实验准备六　所在平面与视线不垂直的双曲线的绘制

在任意放置的平面上绘制双曲线，相当于把一个矩形及其内的双曲线映射为一个平行四边形及其内的相应图形。在平行四边形 $PQRS$ 中绘制双曲线，可以按以下方法实现。

1．以平行四边形 $PQRS$ 的边长为边长作矩形 $IJKL$；作矩形左右两边 IL、JK 的中点 A、B，连点 A、B 得线段 AB。作线段 AB 的中点 C；在线段 AB 上取点 D，使 CD 的长等于双曲线半实轴的长。

2．过中点 C 作线段 AB 的垂线 j，在垂线 j 上取点 E；作矩形的两对角线 k、k'。

3．过点 E 作 AB 的平行线 l，交直线 k 于 F；计算 E、F 两点的距离 EF，计算 C、D 两点的距离 CD，计算 CD、EF 平方和的算术平方根 $\sqrt{CD^2+EF^2}$。

4．以点 E 为圆心、$\sqrt{CD^2+EF^2}$ 为半径作圆 c；作圆 c 和直线 l 的交点 G 和 H（图 9.1-6）。

5．过点 G 作直线 j 的平行线交矩形两边 IJ、LK 于 M、N 两点。

6．计算线段 IM 和线段 IJ 的比 $\dfrac{IM}{IJ}$，计算线段 MG 和线段 MN 的比 $\dfrac{MG}{MN}$。

7．在平行四边形 $PQRS$ 中，以点 P 为中心、以 $\dfrac{IM}{IJ}$ 为缩放比将点 Q 进行缩放，得缩放像点 Q' 。过点 Q' 作边 QR 的平行线交 SR 于点 T ；以点 Q' 为中心、以 $\dfrac{MG}{MN}$ 为缩放比将点 T 进行缩放，得缩放像点 T' 。

8．以平行四边形 $PQRS$ 的中心 O 为中心，将点 T' 旋转 180°，得旋转像点 T'' 。

9．选定点 E 和点 T' ，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得所在平面与视线不垂直的双曲线的一个分支（图 9.1-7）；选定点 E 和点 T'' ，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得双曲线的另一个分支。

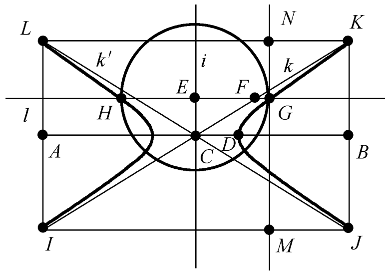


图 9.1-6

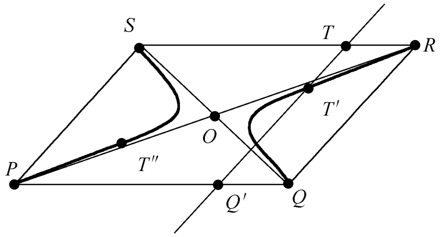


图 9.1-7

实验准备七　可绕 z 轴旋转的坐标架的建立

1．在屏幕右上侧作水平线段 AB ，以点 A 为圆心、点 B 为圆上的点作圆 c_1，在圆 c_1 上取点 C ，作线段 AC 。在圆 c_1 下方作水平线段 DE ，在线段 DE 上取点 F ，计算 D 、E 两点的距离 DE ，计算 D 、 F 两点的距离 DF 。

2．在屏幕中央作点 G ，以点 G 为圆心、分别以 DE 和 DF 为半径作圆 c_2 和 c_3 。过点 G 作线段 AC 的平行线交 c_2 、c_3 于点 H 和点 I 。将点 H 和点 I 绕点 G 旋转 90°，得旋转像点 H' 和 I' 。

3．过点 H 和点 H' 作线段 DE 的垂线 j 和 k ，过点 I 和点 I' 作线段 DE 的平行线 l 和 m ；分别作直线 j 、l 的交点 J 和直线 k 、 m 的交点 K 。

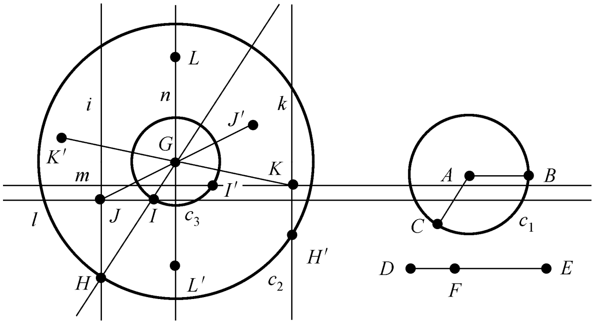


图 9.1-8

4．点 J 和点 K 绕点 G 旋转180°得旋转像点 J' 和 K'，作线段 JJ' 和 KK'。

5．过点 G 作线段 DE 的垂线 n，在 n 上取点 L，将 LG 标记为向量，选定点 G，按标记的向量平移，得平移像点 G'，将点 G' 的标签改为 L'，隐藏直线 n，作线段 LL'（图 9.1-8）。

6．保留圆 c_1、线段 DE 及其上的对象；保留点 G 和线段 JJ'、KK'、LL'，隐藏图中其余对象，将点 G 的标签改为 O。若以 JJ' 为 x 轴、KK' 为 y 轴、LL' 为 z 轴，则所得坐标架可绕 z 轴旋转。

移动圆 c_1 上的点 C 可使坐标架可绕 z 轴旋转，移动线段 DE 上的点 F 可调整坐标架的视角。

【经验点拨】

抛物线基本画法 2 是由顶点、焦参数和对称轴确定抛物线的画法，与抛物线基本画法 1 相比较，更适用于由一条抛物线的顶点沿另一抛物线滑动而生成的双曲抛物面绘制中动抛物线的绘制。双曲线基本画法 2 是能根据顶点、渐近线和实半轴的长绘制双曲线的方法，其解决了由双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面的绘制中需根据顶点、渐近线和实半轴的长绘制双曲线的问题。

9.2　抛物线沿抛物线滑动构建双曲抛物面

【实验内容】

抛物线沿抛物线滑动构建双曲抛物面，通过曲面方程构建双曲抛物面。

【实验思路】

由一条抛物线沿另一条抛物线滑动生成双曲抛物面，两条抛物线开口方向相反且所处的平面互相垂直，动抛物线的顶点在定抛物线上滑动。设计上可考虑在定抛物线上取一点，以此点为顶点绘制对称轴与定抛物线对称轴平行、开口方向相反，且所在平面与定抛物线所在平面垂直的抛物线，再追踪此抛物线的踪迹形成双曲抛物面，或以此抛物线为生成元利用曲线族功能形成双曲抛物面。

在可绕 z 轴旋转的坐标架上建立坐标系，按曲面方程确定曲面上的动点，利用轨迹方法形成分别平行于 yOz 坐标面和 xOz 坐标面的抛物线（平面截线），再用追踪或曲线族功能形成双曲抛物面。

【实验设计】

● 实验 1　一抛物线的顶点沿另一抛物线滑动构建双曲抛物面

1．按“可绕 z 轴旋转的坐标架的建立”方法，在屏幕中央作可绕 z 轴旋转的坐标架。

2．按“所在平面与视线不垂直的抛物线的绘制”的方法，在可绕 z 轴旋转坐标架的 yOz

平面上作以 z 轴为对称轴、顶点位于原点、开口向下的抛物线；制作时可通过将抛物线的准线向上平移半个焦距以使抛物线的顶点能重合于原点。保留抛物线并将其标记为 L_1，隐藏其余的对象。

3．在抛物线 L_1 上取点 M，过点 M 作 x 轴的平行线 k、作 z 轴的平行线 l。

4．按“抛物线基本画法 2”的方法绘制抛物线 2，按“旋转曲面的构建”实验中“S 形曲线映射”的方法将抛物线 1 映射到由直线 k 和直线 l 确定的平面，并使映像抛物线以直线 l 为对称轴、顶点位于点 M、开口向上；将此抛物线标记为抛物线 L_2（图 9.2-1）。

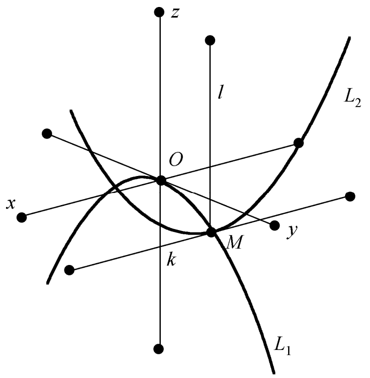


图 9.2-1

5．保留坐标架、两抛物线 L_1 及 L_2 和点 M，隐藏其余对象。

6．将以上制作的课件以“抛物线顶点沿另一抛物线滑动构建双曲抛物面.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“抛物线顶点沿另一抛物线滑动构建双曲抛物面.gsp”。

2．按“追踪轨迹”的方法，设定追踪对象，建立“绘制曲面”、“清除曲面”按钮，观察抛物线顶点沿另一条抛物线滑动构建双曲抛物面的动态生成及清除过程。

3．利用“曲线族”的功能生成“永久性”双曲抛物面。

4．尝试设计一个抛物线顶点沿另一条抛物线滑动构建椭圆抛物面的课件。

【经验点拨】

选定抛物线 L_2，单击【显示】菜单中的【追踪轨迹】后，拖动点 M 即可得到由一条抛物线的顶点沿另一条抛物线滑动而生成的双曲抛物面。也可通过设置绘制曲面的【操作类按钮】的【动画】按钮，利用按钮控制追踪轨迹和擦除追踪痕迹功能，动态生成或擦除双曲抛物面。

利用“曲线族”的功能可生成“永久性”双曲抛物面（图 9.2-2）。

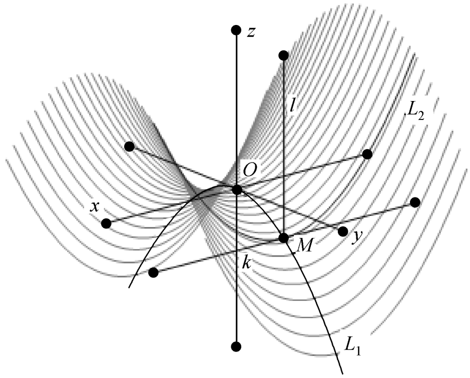


图 9.2-2

【实验设计】

● 实验 2　根据曲面方程构建双曲抛物面

双曲抛物面也可在空间直角坐标系下，直接根据曲面方程构建。

1．按“可绕 z 轴旋转的坐标架的建立”方法，在屏幕中央作可绕 z 轴旋转的坐标架。

2．分别在OJ、OK、OL上取点M、N、H，计算线段OH和线段OL的比$\dfrac{OH}{OL}$；在OJ上取点P，计算线段OP和线段OM的比$\dfrac{OP}{OM}$，将$\dfrac{OP}{OM}$的标签改为x；在OK上取点Q，计算线段OQ和线段ON的比$\dfrac{OQ}{ON}$，将$\dfrac{OQ}{ON}$的标签改为y。

3．计算x^2-y^2，计算$(x^2-y^2)\cdot\dfrac{OH}{OL}$。以点$O$为中心，以$(x^2-y^2)\cdot\dfrac{OH}{OL}$为缩放比，将点$L$缩放得缩放像点$L'$，将点$O$和缩放像点$L'$标记为向量$OL'$。

4．过点P作OK的平行线j，过点Q作OJ的平行线k，作直线j和直线k的交点R；将点R按标记向量OL'平移得平移像点R'。隐藏直线j、k和交点R。

5．选定点Q和点R'，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得开口向下的抛物线$\begin{cases}-y^2=z-k^2\\x=k\end{cases}$，选定点$P$和点$R'$，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得开口向上的抛物线$\begin{cases}x^2=z+h^2\\y=h\end{cases}$（图 9.2-3）。

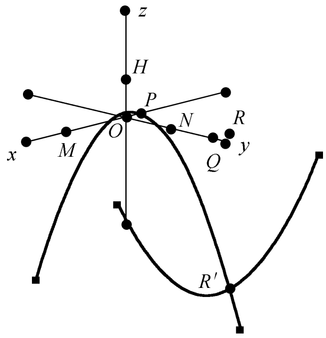


图 9.2-3

6．将点P移到与点O重合的位置，则抛物线$\begin{cases}-y^2=z-k^2\\x=k\end{cases}$变为主抛物线$\begin{cases}-y^2=z\\x=0\end{cases}$。移动点$Q$，即可使抛物线$\begin{cases}x^2=z+h^2\\y=h\end{cases}$的顶点沿抛物线$\begin{cases}-y^2=z\\x=0\end{cases}$滑动。

7．将以上制作的课件以“根据曲面方程构建双曲抛物面.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“根据曲面方程构建双曲抛物面.gsp”。

2．按“追踪轨迹”的方法，设定追踪对象，建立“绘制曲面”、“清除曲面”按钮，观察一条抛物线沿另一条抛物线滑动构建双曲抛物面的动态生成及清除过程。

3．利用“曲线族”的功能生成“永久性”双曲抛物面。

4．尝试通过修改曲面方程构建椭圆抛物面等其他曲面。

【经验点拨】

该方法的特点是能具体根据方程构建双曲抛物面。但在手动演示由一条抛物线的顶点沿另一条抛物线滑动而生成双曲抛物面时，必须拖动x轴上的P点或y轴上的Q点而无法通过拖动抛物线的顶点实现。利用“曲线族”的功能可分别通过抛物线$\begin{cases}-y^2=z-k^2\\x=k\end{cases}$和$\begin{cases}x^2=z+h^2\\y=h\end{cases}$

得到由一族曲线形成的曲面（图 9.2-4、图 9.2-5），通过叠加可得到网格状双曲抛物面（图 9.2-6）。

课件中坐标轴上的点 M、N、H 起单位点作用，移动这些点可使曲面大小发生变化。

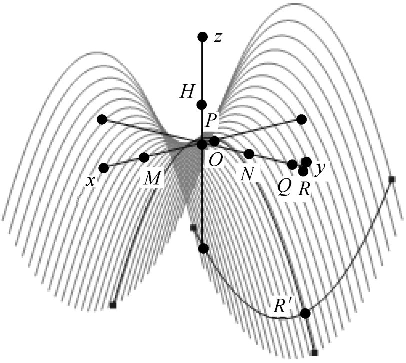


图 9.2-4

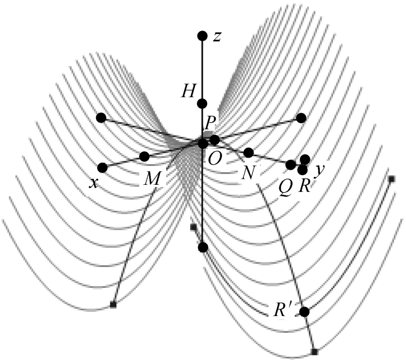


图 9.2-5

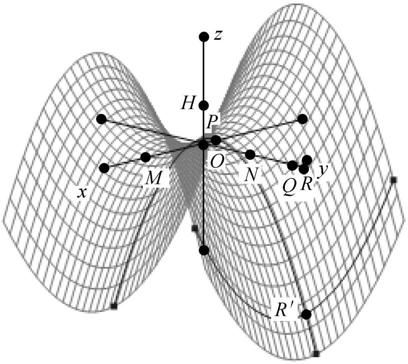


图 9.2-6

9.3　双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面

【实验内容】

双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面。

【实验思路】

由双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面，动双曲线在变动中，始终保持所在平面平行于一个平面（与抛物线的对称轴垂直的平面），而大小和位置都改变，且变动中两顶点分别在两条抛物线上滑动。这两条抛物线，它们所在的平面互相垂直，有公共的顶点与对称轴，开口方向相反。制作上可考虑分别在两条定抛物线上取点，以此两点为顶点分别绘制所在平面

与定抛物线对称轴垂直的两条双曲线，并让其顶点沿定抛物线移动，追踪此两条双曲线的踪迹形成双曲抛物面；或以此两条双曲线为生成元利用曲线族功能形成双曲抛物面。

【实验设计】

1．按“可绕 z 轴旋转的坐标架的建立”方法，在屏幕中央作可绕 z 轴旋转的坐标架。

2．按“所在平面与视线不垂直的抛物线的绘制”的方法，在可绕 z 轴旋转坐标架的 xOz 平面和 yOz 平面分别绘制抛物线，使 xOz 平面上的映像抛物线 p 以 z 轴为对称轴、顶点在原点、开口向上；yOz 平面上的映像抛物线 q 以 z 轴为对称轴、顶点在原点、开口向下。保留两条抛物线，隐藏其余的对象。

3．在 z 轴正方向上取点 S，过点 S 作 x 轴的平行线交抛物线 p 于点 M，点 M 即过点 S 且垂直于 z 轴的平面截双曲抛物面所得双曲线的一个顶点，在此平面上作以点 S 为中心、邻边分别与 x 轴和 y 轴平行的矩形（由于矩形所在平面与视线不垂直，故实际看到的是平行四边形），以矩形的对角线为双曲线的渐近线，以线段 SM 的长为双曲线实半轴的长，按“所在平面与视线不垂直的双曲线的绘制”的方法，作以点 M 为顶点、所在平面平行于 xOy 平面、实轴平行于 x 轴的双曲线（图 9.3-1）。将点 S 移到 z 轴负方向，过点 S 作 y 轴的平行线交抛物线 q 于点 N，用类似的方法（仍以同一矩形的对角线为渐近线）作以点 N 为顶点、所在平面平行于 xOy 平面、实轴平行于 y 轴的双曲线（图 9.3-2）。

4．将以上制作的课件以“双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面.gsp”保存。

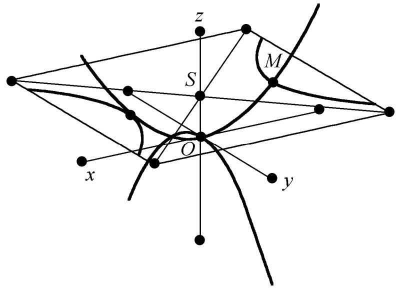


图 9.3-1

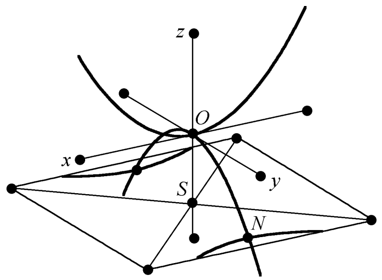


图 9.3-2

【实验要求】

1．细化课件“双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面.gsp”中的各设计，完成课件“双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面.gsp”的制作。

2．运行“双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面.gsp”。

3．按“追踪轨迹”的方法，设定追踪对象，建立“绘制曲面”、“清除曲面”按钮，观察双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面的动态生成及清除过程。

4．利用“曲线族”的功能生成“永久性”双曲抛物面。

5．尝试设计“双曲线沿双曲线及椭圆滑动构建单叶双曲面”实验。

说明：如果用平行于 xOz 平面的平面去截单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，得到的几乎总是双曲线 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}\\ y=h\end{cases}$，其实轴随 $1-\frac{h^2}{b^2}$ 大小的变化，或平行于 x 轴（$1-\frac{h^2}{b^2}>0$ 时），或平行于 z 轴（$1-\frac{h^2}{b^2}<0$ 时），当 $1-\frac{h^2}{b^2}=0$ 时，$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}\\ y=h\end{cases}$ 为两条相交直线。因此，单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 可看成由双曲线 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}\\ y=h\end{cases}$ 变动（大小、位置都改变）而产生的。这个双曲线在变动中，保持所在平面平行于 xOz 平面，且两顶点分别在 yOz 平面上的主截线（双曲线）$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$ 和 xOy 平面上的主截线（腰椭圆）$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ 上滑动。因此，单叶双曲面可以由双曲线沿双曲线和椭圆滑动而生成。

【经验点拨】

“双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面.gsp” 课件中由点 S 确定的两条双曲线，当点 S 沿 z 轴移动时，两条动双曲线的大小位置都在改变着，但始终保持所在平面平行于 xOy 平面。注意到这些双曲线其渐近线的方程都可以表示为 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\\ z=h\end{cases}$，因此在实验设计步骤 3 中，作实轴平行于 y 轴的双曲线时，要使其与实轴平行于 x 轴的双曲线有相同的渐近线。追踪两条动双曲线，拖动点 S 在 z 轴上单向移动一次，即可生成一个双曲抛物面（图 9.3-3）。也可建立“绘制曲面”、“清除曲面”按钮，利用“系列”按钮控制双曲线沿抛物线滑动构建双曲抛物面的动态生成及清除过程。或者分别选定两条双曲线中的一条及点 S，利用“曲线族”的功能生成“永久性”双曲抛物面（图 9.3-4）。

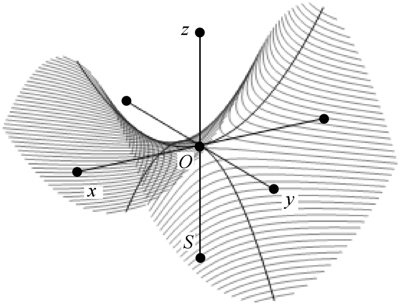


图 9.3-3

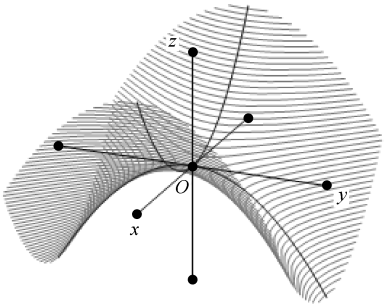


图 9.3-4

实验 10　笛沙格定理和帕斯卡定理的应用

笛沙格（Desargues）定理和帕斯卡（Pascal）定理是射影几何中的重要定理，在点共线、线共点的证明，中心投影和平行投影图形的绘制，以及二次曲线射影性质的研究中有着许多的应用。笛沙格定理应用的一个典型例子，是平面与柱面、锥面等特殊曲面的交线和投影图形的绘制；而由帕斯卡定理，可以导出绘制由平面上一些点或点与直线确定的二次曲线的方法。这些方法虽然典型、简单，然而如果使用传统的手工描绘，难度很大。计算机软件解决了这一难题，利用几何画板软件，可以轻松实现以上交线和曲线的绘制。

【实验目的】

掌握利用笛沙格定理和帕斯卡定理的原理，绘制平面与柱面、锥面的交线，绘制由平面上一些点或点与直线确定的二次曲线的方法，加深对笛沙格定理和帕斯卡定理及其应用于实际的了解。

10.1　笛沙格定理在平面与特殊曲面交线绘制方面的应用

把平面内不共线的三点与其中每两点的连线构成的图形称为三点形，则有笛沙格定理：如果两个三点形对应顶点的连线交于一点，那么其对应边的交点在一条直线上。称对应顶点连线相交的点为透视中心，称对应边交点所在的直线为透视轴（笛沙格定理中涉及的图形称为笛沙格构形，此构形包含 10 个点和 10 条线段。）

笛沙格定理是射影几何中的重要定理。其重要性不仅在于从它可推出一系列射影几何命题，还在于它是平面射影几何的基础。需要特别指出的是，笛沙格定理对于同一平面内的两个三点形，或者两个不同平面的三点形，都是成立的。当位于不同平面的两个三点形对应顶点的连线交于一点时，这两个三点形的对应边的交点在一条直线上，这条直线就是这两个不同平面的交线。而由于在三维空间中，一个三点形可以确定一个平面，因此，可以利用笛沙格定理的结论，求平面与锥面或柱面等直纹面的交线。

【实验内容】

利用笛沙格定理的结论，绘制平面与锥面或柱面等直纹面的交线。

【实验思路 1】

平面截锥面所得截线。

锥面是由通过一个定点并与一条定曲线相交的一族直线所构成的直纹面。在锥面与一个

平面（定平面）相交而得的交线 Γ 上取三个点，构成一个三点形 ABC；再在经过这三个点的三条直母线上各取一个点，形成一个三点形 $A_1B_1C_1$，三点形 $A_1B_1C_1$ 确定了锥面一个动（任意）截面。三点形 ABC 和 $A_1B_1C_1$ 的对应顶点的连线显然交于一点（锥面的顶点），由笛沙格定理，其对应边的交点在一条直线（透视轴）l 上。因此，如果在交线 Γ 上任取一个动点 P，就可通过三点形 ABC 的顶点和透视轴 l 确定经过点 P 的直母线与动截面的交点 P' 的位置，进而由点 P 和 P' 作出过点 P' 的轨迹，得到动截面与锥面的交线。

【实验设计】

1．在锥面 $O\text{-}ECF$（O 为锥面的顶点）的准线 ECF 上取三个点 A、B、C，在经过 A、B、C 的三条直母线上各取点 A_1、B_1 和 C_1，根据锥面的定义，顶点 O 显然是三点形 ABC 和三点形 $A_1B_1C_1$ 的透视中心（图 10.1-1）。

2．作直线 BC 和直线 B_1C_1 的交点 M；作直线 AC 和直线 A_1C_1 的交点 N。

3．作直线 MN，MN 就是三点形 ABC 和三点形 $A_1B_1C_1$ 的透视轴（图 10.1-2）。

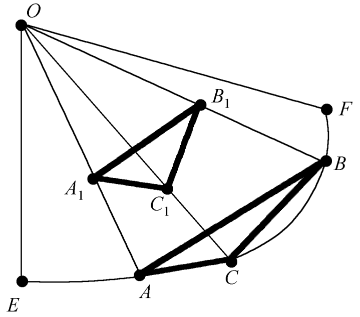


图 10.1-1

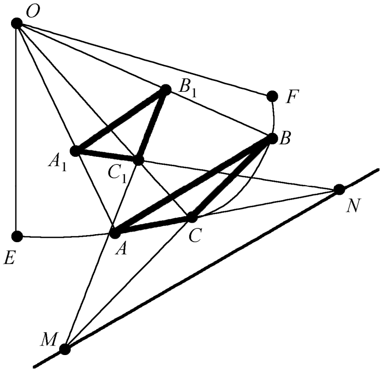


图 10.1-2

4．在准线 ECF 上任取点 P，作直线 BP，交直线 MN 于点 Q；作直线 B_1Q，交直母线 OP 于点 P'。

5．选定点 P 和点 P'，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得由三点形 $A_1B_1C_1$ 确定的平面截锥面 $O\text{-}ECF$ 所形成的截线（图 10.1-3）。

6．将以上制作的课件以“平面截锥面所得截线.gsp”保存。

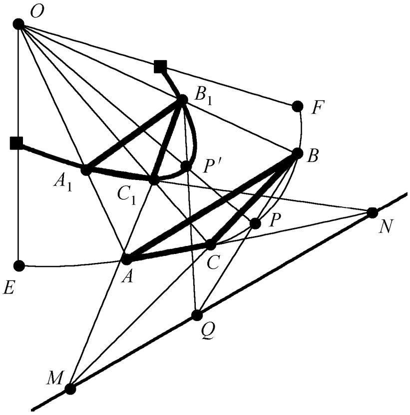


图 10.1-3

【实验要求】

1．运行课件“平面截锥面所得截线.gsp”。

2．通过移动 A_1、B_1、C_1 三点，调整 A_1、B_1、C_1 三点所确定平面的角度，观察 A_1、B_1、C_1 三点所确定平面截

锥面 $O\text{-}ECF$ 所得截线的变化情况。

3．设计一个平面截圆锥面所得截线的课件。运行此课件，调整平面与圆锥面轴线的夹角，观察所得截线的变化情况并记录保存。

【经验点拨】

按照以上方法，设计平面截圆锥面所得截线课件并使平面可随意调整。适当调整平面与圆锥面轴线的夹角，可动态地得到椭圆、抛物线（图 10.1-4）、双曲线（图 10.1-5）和相交直线等不同截线。

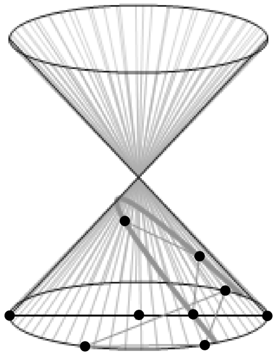


图 10.1-4

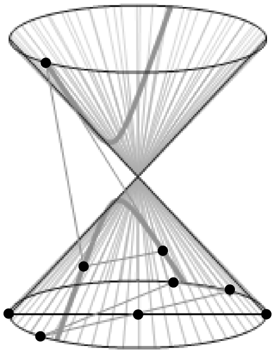


图 10.1-5

【实验思路 2】

平面截柱面所得截线。

柱面是由平行于一个定方向且与一条定曲线相交的一族直线所构成的直纹面。在柱面上显然无法像锥面那样找到对应顶点的连线交于一点的两个三点形。然而，由于笛沙格定理在两个三点形其对应顶点的连线交于无穷远处时仍成立，也即：如果两个三点形对应顶点的连线互相平行，那么其对应边的交点在一条直线上。因此，可通过柱面上三条直母线上的两个三点形确定透视轴，进而由定平面与柱面交线 Γ 上的动点确定动截面上的对应点，作出动截面与柱面的交线。

【实验设计】

1．在柱面 $E'F'-ECF$ 的准线 ECF 上取三个点 A、B、C，在经过 A、B、C 的三条直母线上各取点 A_1、B_1 和 C_1（三点形 ABC 和三点形 $A_1B_1C_1$ 的透视中心在无穷远处）（图 10.1-6）。

2．作直线 BC 和直线 B_1C_1 的交点 M；作直线 AC 和直线 A_1C_1 的交点 N。

3．作直线 MN，MN 就是三点形 ABC 和三为形 $A_1B_1C_1$ 的透视轴（图 10.1-7）。

4．在准线 ECF 上任取点 P，作直线 BP，交直线 MN 于点 Q；作直线 B_1Q，交过点 P 的直母线于点 P'。

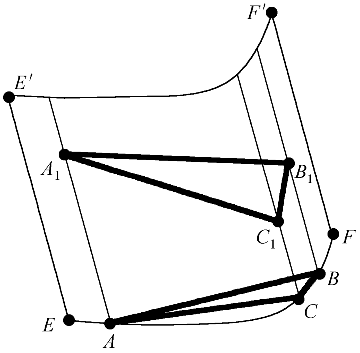


图 10.1-6

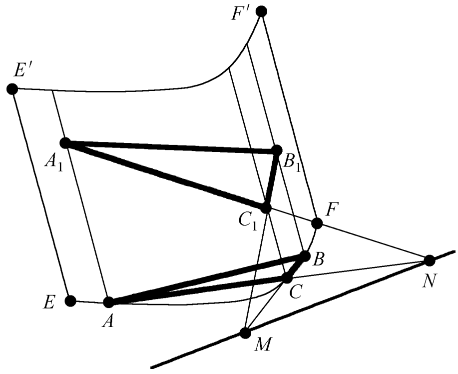


图 10.1-7

5．选定点 P 和点 P'，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即得由三点形 $A_1B_1C_1$ 确定的平面截柱面 $E'F'$-ECF 所形成的截线（图 10.1-8）。

6．将以上制作的课件以“平面截柱面所得截线.gsp”保存。

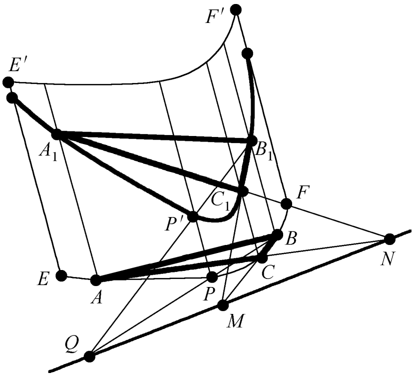


图 10.1-8

【实验要求】

1．运行课件“平面截柱面所得截线.gsp”。

2．通过移动 A_1、B_1、C_1 三点，调整 A_1、B_1、C_1 三点所确定平面的角度，观察 A_1、B_1、C_1 三点所确定平面截锥面 $E'F'-ECF$ 所得截线的变化情况。

3．设计一个平面截抛物柱面所得截线的课件。运行此课件，调整截平面与抛物柱面母线的夹角，观察所得截线的变化情况并记录保存。

【经验点拨】

笛沙格定理的结论可以应用于平行射影和中心投影图形的绘制。

平行射影也称透视仿射，是仿射几何学的概念。平行射影实质是直线到直线或者平面到平面的一个映射，其特点是原像点和对应映像点的连线互相平行。中心投影也称透视，是射影几何的概念。中心投影也是直线到直线或者平面到平面的一个映射，其特点是原像点和对应映像点的连线都通过一点，即投影中心。

当要将一个平面上的几何图形平行射影到另一个平面，或中心投影到另一个平面时，若在原像图形上任取一个三点形，则该三点形与其像三点形对应顶点的连线必平行或共点（透视中心），由笛沙格定理，其对应边的交点在一条直线上，该直线就是两个三点形的透视轴，同时也是两平面的交线。因此，如果在原像图形上任取一个动点 P，就可应用“平面截锥面所得截线.gsp”或“平面截柱面所得截线.gsp”的方法，通过三点形的顶

点和透视轴 l 确定经过点 P 的投影线在像平面上的对应点 P' 的位置，进而由点 P 和 P' 作像图形（图 10.1-9）。

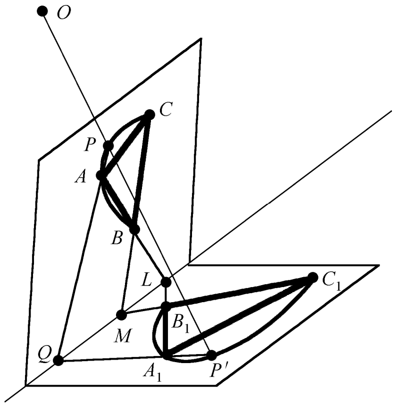


图 10.1-9

10.2 帕斯卡定理在二次曲线绘制上的应用

把平面内不共线的 6 点依次连接所构成的图形称为简单六点形，则有帕斯卡定理：对于任意一个内接于非退化的二阶曲线的简单六点形，它的三对对边的交点在一条直线上。这条直线称为帕斯卡线。每个确定的简单六点形有唯一的帕斯卡线。帕斯卡定理的逆命题成立，即：若简单六点形的三对对边交点在一条直线上，则此六点形必内接于一条二阶曲线。和帕斯卡定理形成对偶命题的是布利安桑（Brianchon）定理：对于任意一个外切于非退化的二级曲线的简单六线形（简单六点形的对偶图形，由平面内不共点的六直线依次相交所构成），它的三对对顶的连线通过一个点。这个点称为布利安桑点。每个确定的简单六线形有唯一的布利安桑点。布利安桑定理的逆命题也成立。把二阶曲线和二级曲线统称为二次曲线。

帕斯卡定理和布利安桑定理都是射影几何中的重要定理，在二次曲线的射影理论中有着重要的地位。

【实验内容】

利用简单六点形（及简单六点形顶点有重合的一些特殊情况下）帕斯卡线的唯一性，绘制由五点确定（或由一些点和切线确定）的二次曲线。

【实验思路 1】

通过 5 个已知点 A、B、C、D、E 的二次曲线的绘制。

考虑同一条二次曲线上的简单六点形，如果取定二次曲线上的 5 个点，而让曲线上的一个动点沿曲线移动，则动点的每个位置对应着一个简单六点形，每个简单六点形确定一条帕

斯卡线，也即动点的每个位置对应着一条帕斯卡线，两者形成了一一对应的关系。另一方面，如果给出 5 个定点作为一个简单六点形的 5 个顶点，则这个简单六点形有一对对边已确定，这对对边的交点就是帕斯卡线上的一点。因此，经过此点的每一条直线都可以视为一条帕斯卡线，对应简单六点形的第 6 个顶点（的一个位置），这个顶点显然在通过 5 个定点的二次曲线上。由此可得绘制通过 5 个已知点的二次曲线的方法。

【实验设计】

1．作直线 AB 、 BC 、 CD 、 DE （图 10.2-1）。

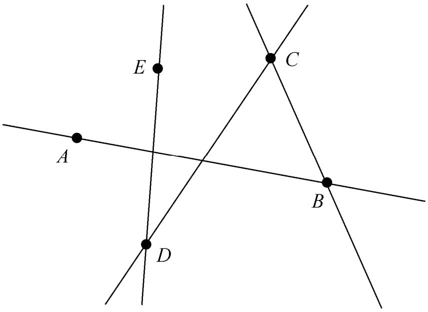


图 10.2-1

2．作直线 AB 、 DE 的交点 L 。

3．在 L 附近作点 F ，以 L 为圆心 F 为圆上点作圆 c_1，在 c_1 上取点 G ，作直线 GL（图 10.2-2）。

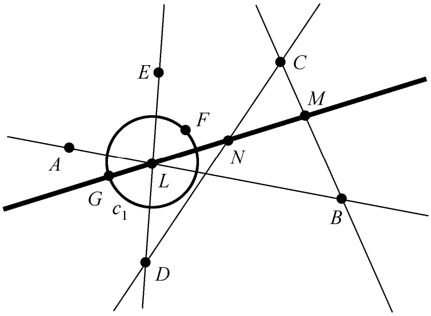


图 10.2-2

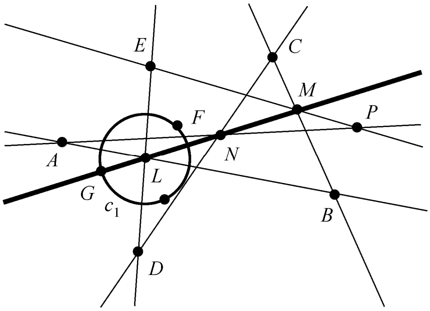


图 10.2-3

4．作直线 GL 和 BC 的交点 M ；过点 E 、 M 作直线 EM 。

5．作直线 GL 和 CD 的交点 N ；过点 A 、 N 作直线 AN 。

6．作直线 EM 和 AN 的交点 P （图 10.2-3）。

7．选定点 G 和点 P ，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即可形成过 A 、 B 、 C 、 D 、 E 这 5 个点的二次曲线（图 10.2-4）。

8．将以上制作的课件以“通过 5 个已知点的二次曲线的绘制.gsp”保存。

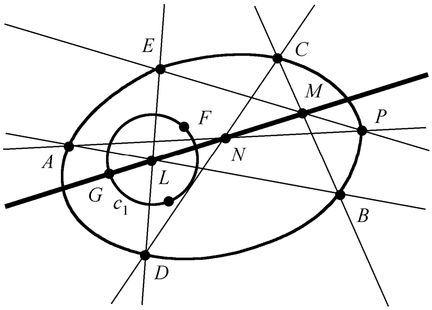


图 10.2-4

【实验要求】

1．运行课件“通过 5 个已知点的二次曲线的绘制.gsp”。

2．移动 A、B、C、D、E 这 5 个已知点的位置，观察由 A、B、C、D、E 这 5 个已知点所确定的二次曲线的变化情况。

3．通过调整已知点的位置，使所绘制的二次曲线的种类尽可能多。记录所得的二次曲线的种类并保存其图像。

【经验点拨】

1．适当调整 5 个已知点的相对位置，可绘制出形态不同的二次曲线，包括圆、椭圆、双曲线等情况。

2．可将以上“通过 5 个已知点的二次曲线的绘制.gsp”创建为几何画板的工具。

创建时只需在【实验设计】1～7 的步骤完成后，依次选定 A、B、C、D、E、F 这 6 个点及绘制所形成的二次曲线，单击工具箱中的自定义工具按钮，在弹出的菜单中选择创建新工具选项打开新建工具对话框，填写工具名称（如“二次曲线”）后单击“确定”按钮即可完成创建（图 10.2-5）。

使用自定义工具绘制二次曲线时，单击工具箱中的自定义工具按钮，在弹出的菜单中选择工具名称“二次曲线”后（选择后工具名称“二次曲线”左侧显示“√”），依次作 A、B、C、D、E 这 5 个点，稍微移动鼠标，待见到通过 A、B、C、D、E 这 5 个点的二次曲线后再作出第 6 个点 F，即完成通过 5 个已知点的二次曲线的绘制。

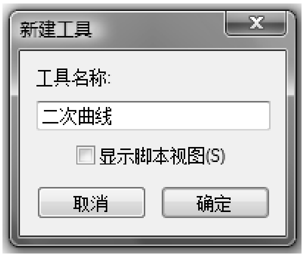


图 10.2-5

【实验思路 2】

通过 3 个已知点 A、B、C 且和直线 j 切于点 E 的二次曲线的绘制。

由于帕斯卡定理在简单六点形的顶点有重合的一些特殊情况下仍成立，因此，若将五点形看成是六点形中有一对相邻顶点重合，重合顶点的连线变为重合点的切线，则有定理：内

接于一条非退化的二阶曲线的简单五点形，一边与其所对顶点的切线的交点，以及其余两对不相邻的边的交点，三点在一条直线上。

假设二次曲线已绘成，曲线通过 3 个已知点 A、B、C 且与直线 j 切于点 E，让曲线上的一个动点沿曲线移动，则动点的每个位置对应着一个有一对相邻顶点重合（于点 E）的六点形，此六点形确定一条帕斯卡线，BC（或 AB）与直线 j 的交点必在此帕斯卡线上。因此，经过此点的每一条直线都可以视为一条帕斯卡线，对应着通过 3 个已知点 A、B、C 且与直线 j 切于点 E 的曲线上的一个点。由此可得绘制通过 3 个已知点 A、B、C 且与直线 j 切于点 E 的二次曲线的方法。

【实验设计】

1．作直线 AB、BC 和 AE。

2．作直线 BC 与切线 j 的交点 M，以 M 为圆心任作一圆 c_1，在 c_1 上取点 G，作直线 GM。

3．作直线 GM 和 AB 的交点 L；过点 E、L 作直线 EL。

4．作直线 GM 和 AE 的交点 N；过点 C、N 作直线 CN。

5．作直线 EL 和 CN 的交点 P。

6．选定点 G 和点 P，单击【构造】菜单中的【轨迹】，即可形成经过 A、B、C 三点且与切线 j 切于点 E 的二次曲线（图 10.2-6）。

7．将以上制作的课件以“通过 3 个已知点且与已知直线切于其上一已知点的二次曲线的绘制.gsp”保存。

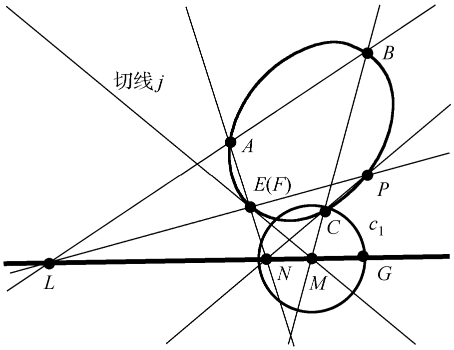


图 10.2-6

【实验要求】

1．运行课件“通过 3 个已知点且与已知直线切于其上一已知点的二次曲线的绘制.gsp”。

2．移动点 A、B、C、E 和切线 j 的位置，观察所确定的二次曲线的变化情况。记录所得的二次曲线的种类并保存其图像。

3．利用课件中的已知点和已知直线（保持已知点和已知直线位置不变），设计以直线 AB

与直线 j 的交点为帕斯卡线必通过点的二次曲线的绘制方法，绘制通过 3 个已知点 A、B、C 且和直线 j 切于点 E 的二次曲线。观察此曲线与课件绘制的曲线的关系，记录结论。

【经验点拨】

1．由于若将四点形视为六点形中有两对相邻顶点重合，则有定理：内接于一条非退化的二阶曲线的简单四点形，一对对边的交点与另一对对边中每一条边与其对顶点的切线的交点，三点在一条直线上。由此可得由已知点 A 和切点分别为 B、D 的两条切线 j、k 确定的二次曲线的绘制方法。作法类似于已知点 A、B、C 和切点为 E 的切线 j 的情况，具体见图 10.2-7，其中点 L 是帕斯卡线上的点，由切线 k 和点 A、B 的位置确定，由点 A 和切点分别为 B、D 的切线 j、k 确定的二次曲线的每一条帕斯卡线都经过此点。

2．由布利安桑定理的逆定理，若六边（线）形三对对顶的连线交于一点，则这个六边形外切于一条二次曲线。如果取定 5 条与二次曲线相切的直线，而让第 6 条直线（动直线）保持与二次曲线相切且变动着，则动直线的每个位置对应着一个六边形，每个六边形确定一个布利安桑点，也即动直线的每个位置对应着一个布利安桑点，两者形成了一一对应的关系。另一方面，如果给出 5 条定直线作为一个简单六边形的 5 条边，则这个六边形有一对对顶点已确定，这对对顶点的连线就是布利安桑点所在的一条直线；这条直线上的每一个点都可以视为一个布利安桑点，对应六边形的第 6 条边，这条边显然与切于 5 条定直线的二次曲线相切，因此也可以利用布利安桑定理绘制二次曲线。要绘制切于 5 条定直线的二次曲线，只需通过变动的布利安桑点驱动切线形成轨迹即可。其具体做法可根据“通过 5 个已知点的二次曲线的绘制.gsp”的方法对偶地得出（图 10.2-8）。

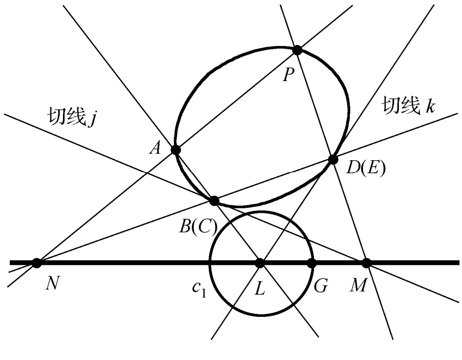


图 10.2-7

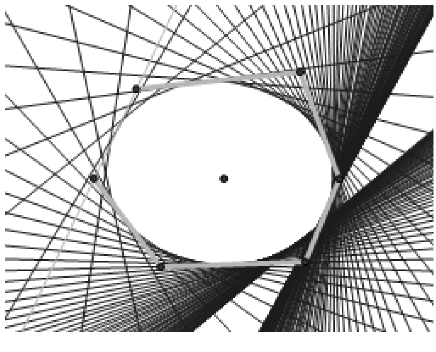


图 10.2-8

实验 11　分形与迭代

分形几何学是一门以非规则几何形态为研究对象的几何学。分形几何在自然科学的诸多领域，如数学、物理、化学、材料科学、生命科学、地质、地理、天文、计算机，乃至经济、社会、艺术等领域，都有着重大的应用。由于不规则现象在自然界是普遍存在的，因此分形几何又称为描述大自然的几何学。

1973 年，美籍数学家曼德尔布劳特（B. B. Mandelbrot）首次提出了分维和分形几何的设想。1975 年，曼德尔布劳特在其《自然界中的分形几何》一书中引入了分形（fractal）这一概念。从字面意义上讲，fractal 是碎块、碎片的意思。

分形几何，通俗一点说，就是研究无限复杂但具有一定意义下的自相似图形和结构的几何学。自然界中许多事物都具有自相似的“层次”结构，在理想情况下，甚至具有无穷层次。适当的放大或缩小几何尺寸，整个结构并不改变。如果将图形的每个元素按某种规则进行变形，得到新的图形，以此类推，进行若干次变形后得到的图形就是分形图形。Koch 雪花曲线、龙曲线、谢尔宾斯基三角形等就是典型的分形图形。

【实验目的】

初步了解几何分形图形的概念及其基本特性，掌握利用几何画板迭代功能生成分形图形的方法。

11.1　二叉树的绘制

二叉树是一种生成元简单、迭代规则也比较简单的分形图形。可以将二叉树每段树枝的长度及树枝之间的角度设置为可变的，从而迭代出形状各异的图形。

【实验内容】

绘制一棵会不断长出树枝、改变树形的“树”。当参数 n 的大小改变时，随着参数的增大，二叉树长出越来越多的分枝；通过改变树枝之间夹角的大小，可改变二叉树的形状。

【实验思路】

先绘制第一层的二叉树，再进行深度迭代，得到由参数 n 控制的二叉树。

【软件技术要点】

1.【标记角度】及【旋转】菜单项的使用。

2．迭代中【添加新映射】菜单项的使用。

【实验设计】

1．用画圆工具在窗口右侧任意画一圆 c_1（不宜太大），圆心为 A，用画点工具在圆 c_1 上取两点 B、C，用画线工具作线段 AB、AC，形成夹角 $\angle BAC$。

2．将点 C 绕圆 c_1 移动，使 $\angle BAC$ 的大小为 150° 左右；用选择工具依次选定点 B、A、C，单击【变换】菜单中的【标记角度】，将 $\angle BAC$ 标记为旋转角（图 11.1-1）。

3．用画线工具作铅直线段 DE，使点 D 在下，点 E 在上。用选择工具选定点 E，单击【变换】菜单中的【标记中心】，将点 E 标记为中心。

4．用选择工具选定点 D，单击【变换】菜单中的【旋转】，按标记角度旋转（图 11.1-2），得像点 D'；再单击【变换】菜单中的【缩放】，在缩放对话框中将固定比设为 3.0∶4.0（图 11.1-3），按缩放按钮得像点 D''；用选择工具选定线段 DE，单击【变换】菜单中的【标记镜面】后，用选择工具选定像点 D''，单击【变换】菜单中的【反射】得像点 D'''。

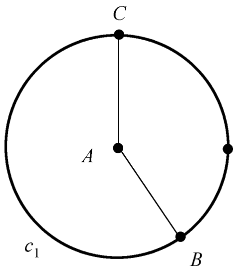


图 11.1-1

图 11.1-2

5．用画线工具作线段 ED''、ED'''，用选择工具选定点 D'，单击【显示】菜单中的【隐藏点】，隐去点 D'。

6．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数 $n=1$。

7．用选择工具选定 DE，右击弹出快捷菜单，选择【粗线】将 DE 的线型设为粗。用选择工具选定线段 ED''，右击弹出快捷菜单，单击【颜色】将 ED'' 的颜色设为绿色，用同样的方法将 ED''' 的颜色也设为绿色（图 11.1-4）。

图 11.1-3

8．依次选定点 D、E 和参数 n，按下 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框后，依次单击图中的 E、D'' 点，将原像 D 的初像设为 E、将原像 E 的初像设为 D''；然后单击“结构”按钮，选择【添加新的映射】，依次单击图中的 E、D''' 点，将原像

D 的初像设为 E、将原像 E 的初像设为 D'''（图 11.1-5）。然后单击“显示”按钮，在菜单中选择“完整迭代”；单击“结构”按钮，在菜单中选择“仅保留非点类像”（图 11.1-6）；单击“迭代”按钮，二叉树作成（图 11.1-7）。

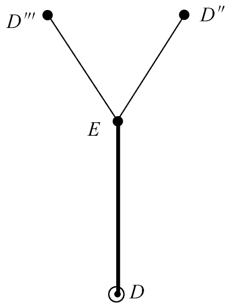


图 11.1-4

图 11.1-5

图 11.1-6

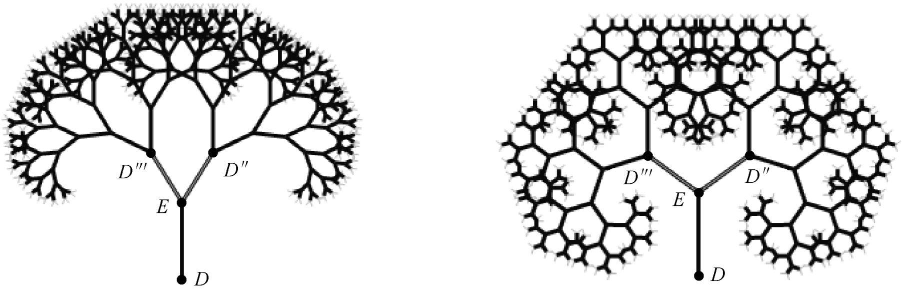


图 11.1-7

9．将以上制作的课件以“二叉树的绘制.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“二叉树的绘制.gsp”。
2．通过改变参数 n 的数值和调整 $\angle BAC$ 的大小，观察二叉树的生长变化情况。
3．设计“树的绘制”课件，绘制的树见图 11.1-8；其生成元见图 11.1-9。

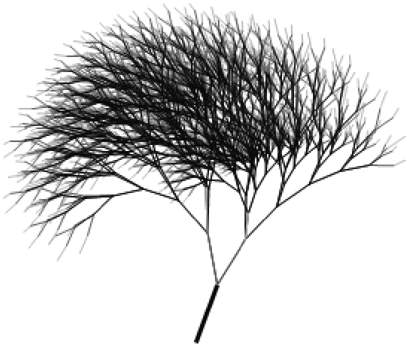


图 11.1-8

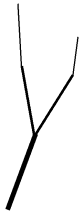


图 11.1-9

【经验点拨】

运行程序需改变参数大小时，可选定参数单击【显示】菜单中的【生成参数的动画】弹出运动控制台使用。也可选定参数单击【编辑】菜单中的【操作类按钮】的【动画】，打开操作类按钮运动参数的属性对话框，设置操作类按钮供程序运行时使用。适当调整夹角 $\angle BAC$ 的大小，可得二叉树的不同图形（图 11.1-10）。

设计“树的绘制”课件时，将其生成元中的 5 段树枝设计为每根都能伸缩且能绕节点旋转，则绘制的树其大小及树形可随意调整。

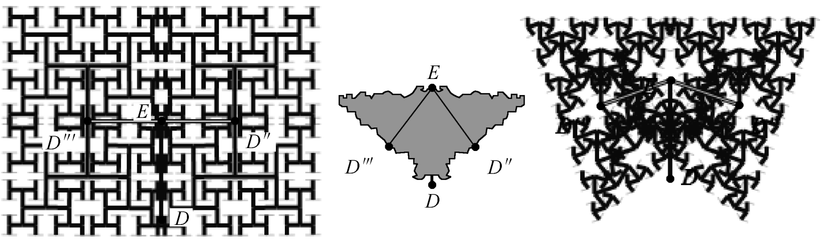


图 11.1-10

11.2 雪花曲线的绘制

Koch 是最典型的分形图形；利用 Koch 曲线的生成元可绘制酷似雪花的曲线。

【实验内容】

绘制 Koch 曲线，进而绘制雪花曲线。

【实验思路】

先作 Koch 曲线的生成元，再进行深度迭代，得到由参数 n 控制的 Koch 曲线；将 3 个 Koch 曲线合并到正三角形的 3 个顶点，即可得到酷似雪花的 Koch 雪花曲线。

【软件技术要点】

1．深度迭代。
2．迭代中【添加新映射】菜单项的使用。
3．【编辑】菜单中【合并点】的使用。

【实验设计】

1．用画点工具作 A、B 两点，选定点 A，单击【变换】菜单中的【标记中心】，将点 A 标记为中心。选定点 B，单击【变换】菜单中的【缩放】，在缩放对话框中将缩放参数固定比设为 1:3，单击“缩放”按钮得像点 B'；再次选定点 B，单击【变换】菜单中的【缩放】，在缩放对话框中将缩放参数固定比设为 2:3，单击“缩放”按钮得像点 B'，用文本工具将此点的标签改为 B''。

2．选定点 B'，单击【变换】菜单中的【标记中心】，将点 B' 标记为中心，选定点 B''，单击【变换】菜单中的【旋转】，在旋转对话框中将旋转参数固定角度设为 60°，单击“旋转”按钮得像点 B'''。

3．用画线工具作线段 AB'、$B'B'''$、$B'''B''$、$B''B$（图 11.2-1）。

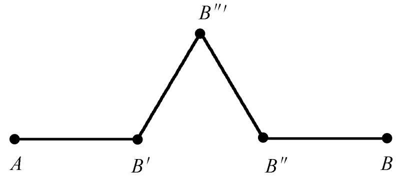


图 11.2-1

4．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数 $n=1$。

5．用选择工具依次选定点 A、B 和参数 n，按下 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框后，依次单击图中的 A、B' 点，将原像 A 的初像设为 A、将原像 B 的初像设为 B'；然后单击“结构”按钮，选择【添加新的映射】，依次单击图中的 B'、B''' 点，将映像#2 中原像 A 的初像设为 B'、原像 B 的初像设为 B'''；再次单击“结构”按钮，选择【添加新的映射】，依次单击图中的 B'''、B'' 点，将映像#3 中原像 A 的初像设为 B'''、将原像 B 的初像设为 B''；第三次单击“结构”按钮，选择【添加新的映射】，依次单击图中的 B''、B 点，将映像#4 中原像 A 的初像设为 B''、将原像 B 的初像设为 B（图 11.2-2）。然后单击“显示”按钮，在菜单中选择“完整迭代”（在相应项上打钩）；单击“结构”按钮，在菜单中选择“仅保留非点类像”，不选择“生成迭代数据表”；单击“迭代”按钮，即得 Koch 曲线 AB（图 11.2-3）。

图 11.2-2

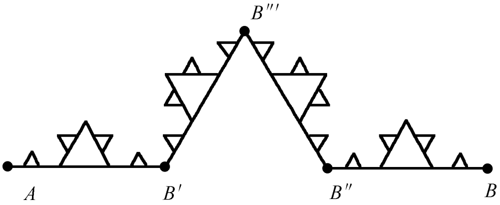


图 11.2-3

6．用同样的方法，利用同一个参数 n 再绘制 Koch 曲线 CD 和 EF 。

7．选定点 B ，单击【变换】菜单中的【标记中心】，将点 B 标记为中心，选定点 A ，单击【变换】菜单中的【旋转】，在旋转对话框中将旋转参数固定角度设为 60° ，单击“旋转”按钮得像点 A' 。

8．依次选定点 C 、 B ，单击【编辑】菜单中的【合并点】，将点 C 合并到点 B ，依次选定点 D 、 A' ，单击【编辑】菜单中的【合并点】，将点 D 合并到点 A' ；依次选定点 E 、 A' ，单击【编辑】菜单中的【合并点】，将点 E 合并到点 A' ，依次选定点 F 、 A ，单击【编辑】菜单中的【合并点】，将点 F 合并到点 A （图 11.2-4）。

9．将以上制作的课件以“雪花曲线的绘制.gsp”保存。

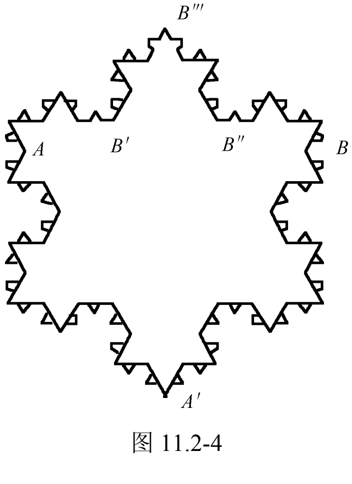


图 11.2-4

【实验要求】

1．运行课件“雪花曲线的绘制.gsp”。

2．通过改变参数 n 的数值的大小，观察雪花曲线的变化情况。

3．设计绘制谢尔宾斯基四面体（图 11.2-5）或谢尔宾斯基正方体（图 11.2-6）的课件。谢尔宾斯基三角形和谢尔宾斯基地毯及其生成元见图 11.2-7 和图 11.2-8。

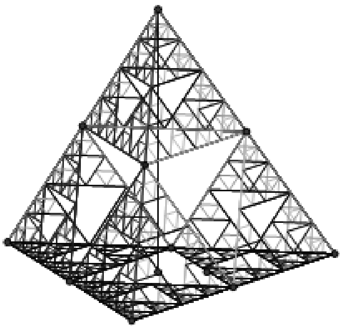


图 11.2-5

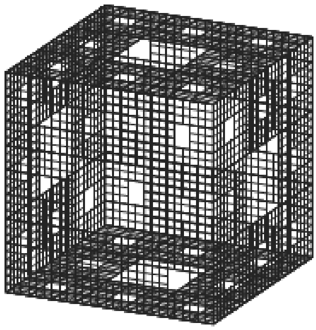


图 11.2-6

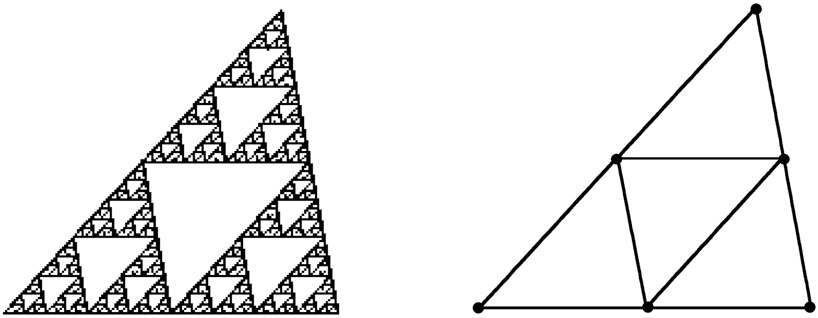


图 11.2-7

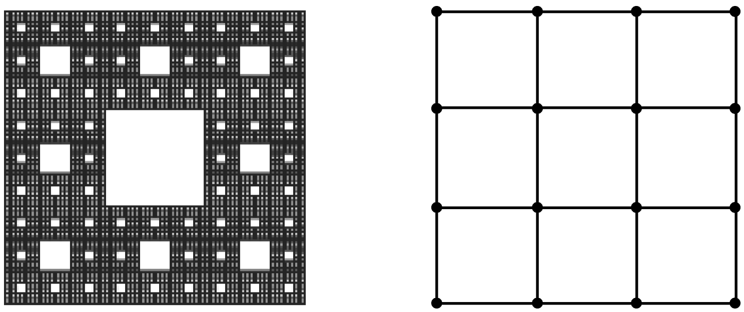


图 11.2-8

【经验点拨】

只以点 A、B'、B'''、B''、B 作 Koch 曲线的生成元，即省略作线段 AB'、$B'B'''$、$B'''B''$、$B''B$ 的步骤，并将迭代像点的颜色设为蓝色，绘制出的雪花曲线更漂亮。

通过相应生成元的迭代，得到谢尔宾斯基三角形和谢尔宾斯基地毯；利用【编辑】菜单中【合并点】功能，4个谢尔宾斯基三角形可构成1个谢尔宾斯基四面体，6个谢尔宾斯基地毯可构成1个谢尔宾斯基正方体。

11.3 勾股树的绘制

【实验内容】

绘制一棵以直角三角形三边作正方形所得的勾股图为躯干的“树”——勾股树。通过改变参数的大小，控制勾股树分枝的“生长”。

【实验思路】

以正方形的一边为斜边，绘制一个直角三角形，作为勾股树的第一层，再进行深度迭代，得到由参数 n 控制的勾股树。

【软件技术要点】

1.【显示】菜单的【颜色】菜单项的使用。
2．深度迭代。
3．迭代中【添加新映射】菜单项的使用。

【实验设计】

1．绘制一个正方形。用画线工具作线段 AB；选定点 A 单击【变换】菜单中的【标记中心】，将点 A 标记为旋转中心，选定点 B 和线段 AB，单击【变换】菜单中的【旋转】，旋转角设为90°，单击“旋转”按钮得像点 B' 及像线段 AB'；选定点 B' 单击【变换】菜单中的【标记中心】，将点 B' 标记为旋转中心，选定点 A 和线段 AB'，单击【变换】菜单中的【旋转】，旋转角设为90°，单击“旋转”按钮得像点 A' 及像线段 $B'A'$；用画线工具作线段 BA'。正方形 $ABA'B'$ 作成。

2．在正方形 $ABA'B'$ 的 $B'A'$ 边上作直角三角形。用选择工具选定线段 $B'A'$，单击【构造】菜单中的【中点】作线段 $B'A'$ 的中点，依次选定中点、A'、B' 三点，单击【构造】菜单中的【圆上的弧】作以 A'、B' 为直径端点的半圆弧。用画点工具在半圆弧上任意取点 C；用画线工具作线段 $B'C$、CA'，直角三角形 $B'CA'$ 作成（图11.3-1）。用选择工具选定线段 $B'A'$ 的中点和半圆弧，单击【显示】菜单中的【隐藏对象】，隐藏 $B'A'$ 的中点和半圆弧。

3．以直角三角形两直角边为边作正方形。选定点 B' 单击【变换】菜单中的【标记中心】，将点 B' 标记为旋转中心，选定点 C 和线段 $B'C$，单击【变换】菜单中的【旋转】，旋转角设为 90°，单击“旋转”按钮得像点 C' 及像线段 $B'C'$；选定点 C' 单击【变换】菜单中的【标记中心】，将点 C' 标记为旋转中心，选定点 B' 和线段 $B'C'$，单击【变换】菜单中的【旋转】，旋转角设为 90°，单击“旋转”按钮得像点 B'' 及像线段 $C'B''$；用画线工具作线段 $B''C$，正方形 $B'CB''C'$ 作成。同样的方法作出另一个正方形（图 11.3-2）。

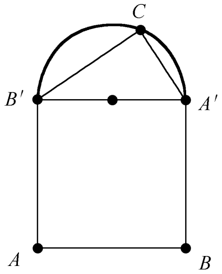


图 11.3-1

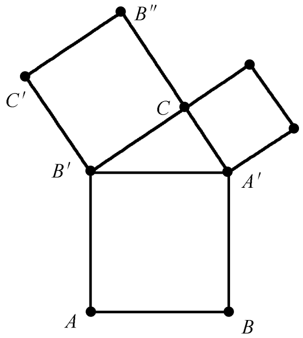


图 11.3-2

4．用画点工具在正方形 $ABA'B'$ 的外面任取点 D，选定点 A 和点 D，单击【度量】菜单中的【距离】，求出 A、D 两点的距离。

5．用选择工具依次选定正方形 $ABA'B'$ 的 4 个顶点 A、B、A'、B'，单击【构造】菜单中的【四边形内部】，构造四边形 $ABA'B'$ 内部；用选择工具选定四边形内部和 A、D 两点的距离后，单击【显示】菜单中的【颜色】，在弹出的颜色盘中选择“参数”，打开颜色参数对话框，选择显示对象时使用“颜色”单选项，参数范围从 0.0 到 1.0，颜色范围选择“双向循环”单选项（图 11.3-3）。单击“确定”按钮给 $ABA'B'$ 内部设定一种颜色。用同样的方法给另外两个正方形设置颜色（图 11.3-4）。

图 11.3-3

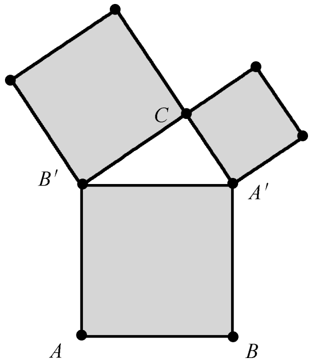


图 11.3-4

6．单击【数据】菜单中的【新建参数】，新建参数 $n=1$。

7．用选择工具依次选定点 A、B 和参数 n，按下 Shift 键，单击【变换】菜单中的【深度迭代】，弹出迭代对话框后，依次单击图中的 B'、C 点，将原像 A 的初像设为 B'、将原像 B 的初像设为 C；然后单击“结构”按钮，选择【添加新的映射】，依次单击图中的 C、A' 点，将原像 A 的初像设为 C、将原像 B 的初像设为 A'（图 11.3-5）。然后单击“显示”按钮，在菜单中选择“完整迭代”（在相应项上打钩）；单击“结构”按钮，在菜单中选择“仅保留非点类像”及“到与初始对象上点相对类似的位置”，不选择“生成迭代数据表”；单击“迭代”按钮，勾股树作成（图 11.3-6）。

图 11.3-5

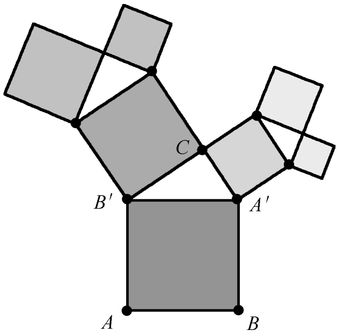


图 11.3-6

8．将以上制作的课件以“勾股树的绘制.gsp”保存。

【实验要求】

1．运行课件“勾股树的绘制.gsp”。

2．通过改变参数 n 的数值的大小，观察勾股树形状的变化情况，移动点 D 位置改变 A、D 两点的距离，观察勾股树颜色的变化情况。

3．设计绘制龙曲线的课件。龙曲线及其生成元见图 11.3-7 和图 11.3-8。

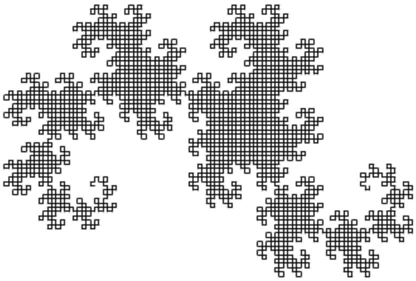


图 11.3-7

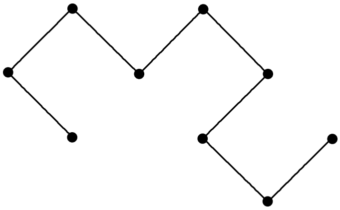


图 11.3-8

【经验点拨】

可以将课件中点 D 位置设计成不断改变的，以使勾股树的颜色不断变化。

实验 12　数字规律的验证

数字中存在着许许多多的规律，这些规律，有些已得到证明，而有些还只是猜想，需要人们去验证并加以证明。数字规律问题往往以数学趣题的形式出现，对这些问题的验证解决，有着各种各样的方法，而简捷的解决方法，又常常蕴涵着对人的机智的考验。

【实验目的】

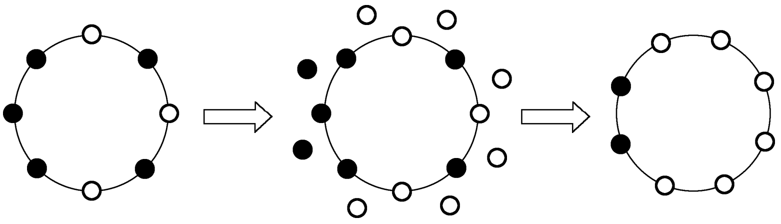
通过对“黑白棋子问题”、“$3N+1$ 问题”、“幸存者问题”的验证，使学生了解“黑白棋子问题”、“$3N+1$ 问题”、“幸存者问题”的相关知识，掌握利用 Excel 软件验证或解决这些问题的一些方法。

12.1　黑白棋子问题

黑白棋子问题是一个有趣的问题：任意拿出黑白两种颜色的棋子共 8 枚排成一个圆圈（图 12.1-1），然后在两枚颜色相同的棋子中间放一枚黑色的棋子、在两枚不同颜色的棋子中间放一枚白色的棋子，放完后撤掉原来所放的棋子。重复上述过程，各棋子的颜色会怎样变化？

【实验内容】

利用 Excel 软件求解以上黑白棋子问题，并进行推广，探索不同数量黑白棋子按上述规则变换，各棋子颜色的变化规律。



（左）　　　　（中）　　　　（右）

图 12.1-1

【实验思路】

根据棋子摆放的规则，“在两枚颜色相同的棋子中间放一枚黑色的棋子、在两枚不同颜色的棋子中间放一枚白色的棋子”，可以得出棋子颜色的变化规律为

黑黑得黑，白白得黑，黑白得白，白黑得白。

如果用+1 表示黑色，–1 表示白色，则棋子摆放的规则可表示为

$$1\times1=1，(-1)\times(-1)=1，1\times(-1)=-1，(-1)\times1=-1$$

这恰好是有理数乘法运算的符号法则。依照这个法则，若前一轮摆放的 8 枚棋子的颜色序列为 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$，其中 $a_i=\pm1$，$i=1,2,\cdots,8$，则下一轮 8 枚棋子的颜色变为

$$a_1a_2,a_2a_3,a_3a_4,a_4a_5,a_5a_6,a_6a_7,a_7a_8,a_8a_1$$

棋子按以上规则变化的结果可通过计算机编程求解，也可以用 Excel 软件方便地解决。

【实验设计】

1．打开一个工作表，在单元格 B1：I1 依次输入 1，2，…，8；单元格 A2 输入 0，单元格 B2：I2 依次输入表示黑白棋子的+1 与–1，见图 12.1-1（左）从 12 点钟方向起，顺时针依次为–1，1，–1，1，–1，1，1，1。

B3　=B2*I2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	-1	1	-1	1	-1	1	1	1
3	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
4	2	-1	1	1	1	1	1	-1	1
5	3	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
6	4	1	1	-1	1	1	1	-1	1
7	5	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
8	6	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
9	7	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
10	8	1	1	1	1	1	1	1	1
11									

图 12.1-2

2．在单元格 A3 输入 1，单元格 B3 输入“=I2*B2”，在单元格 C3 输入“=B2*C2”，选定单元格 C3，利用填充句柄填充至单元格 I3。

3．将以上制作的课件以“黑白棋子问题.xls”保存。

【实验要求】

1．运行“黑白棋子问题.xls”课件。

2．选定单元格 A3：I3，利用填充句柄向下填充。对填充的区域进行观察，各行数据的变化有什么规律。是否从某行开始，一行中的所有数据均变为相同的数字，这说明什么问题？

3．对“黑白棋子问题.xls”课件进行修改，探索不同数量黑白棋子按上述规则变换，各棋子颜色的变化规律。总结并记录你的发现及结论。

【经验点拨】

运行“黑白棋子问题.xls”课件，对填充的区域进行观察，可发现 B9：I9 单元格全部变为−1，而 B10：I10 及以下的各行，所有数据均变为 1。表明初始状态为图 12.1-1（左）的 8 枚棋子，若按“在两枚颜色相同的棋子中间放一枚黑色的棋子、在两枚不同颜色的棋子中间放一枚白色的棋子”的规则进行变换，则经过 7 次变换，全部变为白色棋子，经 8 次变换，即可全部变为黑色棋子（图 12.1-2）。

12.2　幸存者问题

2007 个人站成一圈，编号分别为 1，2，3，…，2007。从第 1 号开始进行 1 至 2 报数，凡是报到 2 的人退出圈子，剩下的人再重复 1 至 2 报数，报到 2 的人退出圈子……这样循环进行到剩下最后一个人为止。这个人是多少号？

这类问题称为幸存者问题，或叫约瑟夫斯问题（Josephus’ Problem）。幸存者问题来源于圣经的一个故事：约瑟夫斯（Fluvius Josephus，公元 37—100 年）是一位犹太历史学家，也是公元 60—70 年犹太人反抗罗马占领的义军指挥官。当敌人占领了 Jopatap 以后，约瑟夫斯和他的 40 个犹太教徒藏在一个洞穴里。后面的故事有两个截然不同的版本，一个版本说其他 40 名犹太教徒见脱身无望，又不愿投降，乃决定自杀，而约瑟夫斯贪生怕死，诡称自杀不符合犹太人的道德，应该用“见几去一”的方法顺序由同伴处死先数中的人，只有剩下的最后一个人才自杀。另一个版本则说约瑟夫斯决定自杀，但其余 40 人中只有一个人也愿意自杀，于是他想出一个“见几去一”的办法，并设法使自己与愿意自杀的那个人排在巧妙的位置，正好把其他人都处死后留下他们 2 人自杀。

这里不去辨别两个版本的真伪，只就事论事。他们处置的办法是：所有人围成一圈，从某人开始点数，每点 3 人，就把第 3 个人拉出圈处死。约瑟夫斯让自己排在第 31 位，免于一死（在第二个版本里，他还要让愿意自杀的那个人排在第 16 位，从而留下他们 2 人）。

约瑟夫斯问题（有时也称为约瑟夫斯置换），是一个出现在计算机科学和数学中的问题。在计算机编程的算法中，类似问题又称为约瑟夫斯环。该问题更一般的表达如下：

有 n 个囚犯站成一个圆圈，准备处决。首先从一个人开始，越过 $k-1$ 个人（因为第一个人已经被越过），并杀掉第 k 个人。接着，再越过 $k-1$ 个人，并杀掉第 k 个人。这个过程沿着圆圈一直进行，直到最终只剩下一个人留下，这个人就可以继续活着。

问题是，给定了 n 和 k，一开始要站在什么地方才能避免被处决？

幸存者问题在西方被称为约瑟夫斯问题；在中国的民间传说则以八仙落座的形式表述。

如何求解幸存者问题？

先考虑一个人数较少的同类问题：16 个人站成一圈，编号分别为 1，2，3，…，16。从

第 1 号开始 1 至 2 报数，凡是报到 2 的人退出圈子，这样循环进行到剩下最后一个人为止。这个人是多少号？

设 $f(n)$ 为一开始有 n 个人时，留存者（剩下的最后一个人）的位置。走了一圈以后，所有偶数号码的人退出。再走第二圈，则新的第 2、第 4……个人退出，等等；就像没有第一圈一样。

如果一开始有偶数个人，则第二圈时位置为 x 的人一开始（第一圈时）在第 $2x-1$ 个位置。因此，位置为 $f(2n)$ 的人开始时的位置为 $2f(n)-1$，即 $2n$ 个人时留存者的位置（编号）是有 n 个人时留存者的位置（编号）的 2 倍减 1。例如，易知 1 个人时留存者的位置为 1，2 个人时留存者的位置为 1，4 个人时留存者的位置也为 1，有 $f(2)=2f(1)-1$，$f(4)=2f(2)-1$。一般地，有以下的递推公式：

$$f(2n)=2f(n)-1$$

如果一开始有奇数个人，则走了一圈以后，最终是号码为 1 的退出。于是同样的，再走第二圈时，新的第 2、第 4……个人退出，等等。在这种情况下，位置为 x 的人原先位置为 $2x+1$。由于 3 个人时，留存者位置也为 3，易知此时有 $f(3)=2f(1)+1$。一般地，有以下的递推公式：

$$f(2n+1)=2f(n)+1$$

如果把 n 和 $f(n)$ 的值列成下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

从中可以看出，$f(n)$ 是一个递增的奇数数列，每当 n 是 2 的幂时，便重新从 $f(n)=1$ 开始。因此，如果选择 m 和 l，使得 $n=2^m+l$ 且 $0\leqslant l<2^m$，那么 $f(n)=2l+1$。显然，表格中的值满足这个方程。

由于 $16=2^4+0$，这里 $n=16$，$m=4$，$l=0$，所以 $f(16)=2\times0+1=1$。即 16 个人站成一圈，编号分别为 1，2，3，…，16；从第 1 号开始 1 至 2 报数，凡是报到 2 的人退出圈子，这样循环进行到剩下最后一个人时，此人的编号是 1。

在一般情况下（逢 k 退出），这个问题的最简单的解决方法是使用动态规划。

利用 Excel 软件，可以较方便地解答以上“幸存者问题”。

【实验内容】

利用 Excel 软件解答“幸存者问题”。

【实验思路】

在工作表第 1 行输入 16 个人的编号，在第 2 行中每个编号对应的单元格输入一个“1”，

统计第 2 行中的“1”的个数，在第偶数个“1”所在列对应的第 3 行的单元格里填入“0”，第奇数个“1”所在列对应的第 3 行的单元格里填入“1”；统计第 3 行中的“1”的个数，在第偶数个“1”所在列对应的第 4 行的单元格里填入“0”，第奇数个“1”所在列对应的第 4 行的单元格里填入“1”……如此进行下去，直到某一行中只剩下一个“1”，这个“1”所在列对应的编号就是“幸存者”的编号。

这里要解决两个问题：一是如何统计判断某一行中哪个“1”是第奇数个，哪一个“1”是第偶数个，以便在下一行的对应位置填入“1”或“0”；二是从第 3 行起，对“1”的奇偶个数判断，需要考虑前一行的情况，如何将前一行的奇偶性累计到后一行。

对于前者，使用 SUM、MOD 和 IF 三个函数解决。用 SUM($A2:B2)统计从单元格 A2 至当前单元格 B2 的值，用 MOD(SUM($A2:B2)，2)的返回值判断第 2 行 B2 单元格中的“1”是第奇数个还是第偶数个；在第 3 行使用函数 IF(MOD(SUM($A2:X2)，2)=0，0，X2)根据 MOD(SUM($A2:X2)，2)的返回值是“0”还是“1”，确定 X3 单元格中是填“0”，还是保留 X2 单元格中原有的值。

对于后者，在第 3 行 A3 单元格使用 SUM(A2:Q2)–2*INT(SUM(A2:Q2)/2)统计第 2 行“1”的奇偶个数，并在以下各行依此类推。

【实验设计】

1．打开工作表，在 B1：Q1 单元格依次输入 1，2，…，16，在 B2：Q2 单元格全部输入“1”。

2．在 A3 单元格输入“=SUM(A2: Q 2)–2*INT(SUM(A2: Q 2)/2)”（图 12.2-1）。

3．在 B3 单元格输入“=IF(MOD(SUM($A2:B2)，2)=0，0，B2)”后，将 B3 单元格的公式向右填充至 Q3 单元格（图 12.2-2）。

4．将以上制作的课件以“幸存者问题.xls”保存。

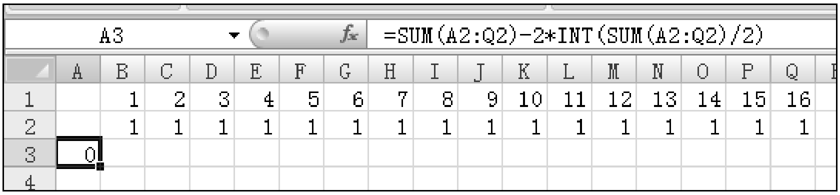


图 12.2-1

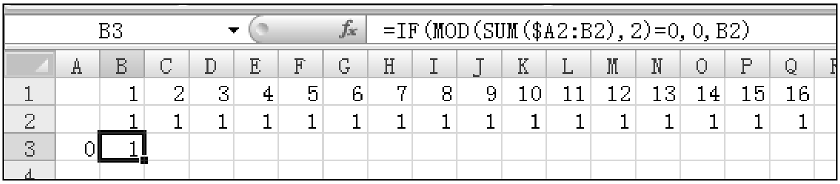


图 12.2-2

【实验要求】

1．运行“幸存者问题.xls”课件。

2．依次选定 A3 至 Q3 的各个单元格，利用填充句柄向下填充，直至某一行只有一个“1”，这个“1”所对应的编号就是“幸存者”的编号。记录结论。

3．对“幸存者问题.xls”课件进行修改，探索 n、k 不同取值的约瑟夫斯环问题解决的办法并记录保存。

约瑟夫斯问题的一个推广称为约瑟夫斯环问题。

设有 n 个人，其编号分别为 $1, 2, 3, \cdots, n$，按照编号顺序顺时针围坐一圈。选定一个正整数 k，从第一个人开始顺时针报数，报到 k 时，则此人出列，然后从他的下一个人开始，从 1 重新报数，报到 k 时则此人出列。依此类推，直到只剩一个人为止，求出列的顺序。

【经验点拨】

“幸存者问题.xls”课件中，判断一行中某个“1”是第奇数个还是第偶数个，也可利用 INT 函数。

12.3 “3*N*+1”问题

“$3N+1$”问题也称“$3x+1$”问题。20 世纪 30 年代汉堡大学的卡拉兹（Collats）提出一个猜想：

$x_0 = n_0$，n_0 是自然数。若 n_0 是偶数，则取 $x_1 = \dfrac{x_0}{2}$，若 n_0 是奇数，则取 $x_1 = \dfrac{3x_0+1}{2}$；x_1 是偶数，则取 $x_2 = \dfrac{x_1}{2}$，x_1 是奇数，则取 $x_2 = \dfrac{3x_1+1}{2}$，如此进行，则到某一步，$x_k = 1$。

“$3N+1$”问题（猜想）用数学语言描述如下。

将一个自然数 n_i 按以下方法形成一个新数 n_{i+1}，当 n_i 为偶数时将它除以 2，当 n_i 为奇数时将它乘以 3 再加 1，然后除以 2，即

$$n_{i+1} = \begin{cases} \dfrac{n_i}{2}, & n_i = 2k \\ \dfrac{3n_i+1}{2}, & n_i = 2k+1 \end{cases}$$

这样形成的新数数列最终必在某一项到达 1。

例如：

98→49→74→37→56→28→14→7→11→17→26→13→20→10→5→8→4→2→1

99→149→224→112→56→28→14→7→11→17→26→13→20→10→5→8→4→2→1

100→50→25→38→19→29→44→22→11→17→26→13→20→10→5→8→4→2→1

101→152→76→38→19→29→44→22→11→17→26→13→20→10→5→8→4→2→1

102→51→77→116→58→29→44→22→11→17→26→13→20→10→5→8→4→2→1

30→15→23→35→53→80→40→20→10→5→8→4→2→1

36→18→9→14→7→11→17→26→13→20→10→5→8→4→2→1

45→68→34→17→26→13→20→10→5→8→4→2→1

46→23→35→53→80→40→20→10→5→8→4→2→1

21→32→16→8→4→2→1

12→6→3→5 →8→4→2→1

64→32→16→8→4→2→1

“$3N+1$”问题是一个世界难题，直到现在还没能证明。

利用 Excel 软件，可以方便地对指定的整数验证“$3N+1$”问题（猜想）。

【实验内容】

利用 Excel 软件对指定的整数，验证“$3N+1$”问题（猜想）。

【实验思路】

利用 INT 或 MOD 函数判断一个数是否为偶数，利用 IF 函数设置两个不同的分支，通过公式填充产生新数。

【实验设计】

1．打开工作表，在 A1 单元格内任意输入一个整数，如 35。

2．在 A2 单元格输入“=IF(A1/2=INT(A1/2)，A1/2，(3*A1+1)/2)”。

3．将以上制作的课件以“$3N+1$猜想验证.xls”保存。

以上课件若将填充句柄横向填充，可一次对多个任意整数验证“$3N+1$”猜想（图 12.3-1）。

【实验要求】

1．运行“$3N+1$猜想验证.xls”课件。

2．选定 A2 单元格，利用填充句柄向下填充，观察 A2 单元格所在列以下各行单元格内数值变化情况。若某一行出现“1”，则表明$3N+1$猜想对该数成立。

3．利用“$3N+1$猜想验证.xls”课件，一次对多个任意整数验证“$3N+1$”猜想，并记录保存。

4．尝试设计能对指定的数验证下列猜想的课件。

将一个自然数 n_i 按以下方法形成一个新数 n_{i+1}，当 $n_i \equiv 0 \pmod 3$ 时将它除以 3；当 $n_i \equiv 1 \pmod 3$ 时将它乘以 2 再加 1，然后除以 3；当 $n_i \equiv 2 \pmod 3$ 时将它乘以 2 再减 1，然后除以 3。即

$$n_{i+1}=\begin{cases}\dfrac{n_i}{3}, & n_i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3)\\[2mm] \dfrac{2n_i+1}{3}, & n_i\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3)\\[2mm] \dfrac{2n_i-1}{3}, & n_i\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,3)\end{cases}$$

这样形成的新数数列，最终必在某一项到达 1。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	35	7	11	13	15	17	19	22	23	29	37	57	85	87	101	341	729
2	53	11	17	20	23	26	29	11	35	44	56	86	128	131	152	512	1094
3	80	17	26	10	35	13	44	17	53	22	28	43	64	197	76	256	547
4	40	26	13	5	53	20	22	26	80	11	14	65	32	296	38	128	821
5	20	13	20	8	80	10	11	13	40	17	7	98	16	148	19	64	1232
6	10	20	10	4	40	5	17	20	20	26	11	49	8	74	29	32	616
7	5	10	5	2	20	8	26	10	10	13	17	74	4	37	44	16	308
8	8	5	8	1	10	4	13	5	5	20	26	37	2	56	22	8	154
9	4	8	4		5	2	20	8	8	10	13	56	1	28	11	4	77
10	2	4	2		8	1	10	4	4	5	20	28		14	17	2	116
11	1	2	1		4		5	2	2	8	10	14		7	26	1	58
12		1			2		8	1	1	4	5	7		11	13		29
13					1		4			2	8	11		17	20		44
14							2			1	4	17		26	10		22
15							1				2	26		13	5		11
16											1	13		20	8		17
17												20		10	4		26
18												10		5	2		13
19												5		8	1		20
20												8		4			10
21												4		2			5
22												2		1			8
23												1					4
24																	2
25																	1
26																	

图 12.3-1

【经验点拨】

利用“$3N+1$猜想验证.xls”课件，在 B1 至 P1 的单元格中输入任意整数，选定 A2 单元格，利用填充句柄向右填充至 P2 单元格。选定 A2 至 P2 单元格，利用填充句柄向下填充，即可一次对多个任意整数验证$3N+1$猜想，

若你能遇到一个无法出现“1”的数，则祝贺你，因为这表明你找到了“$3N+1$”猜想的一个反例。

实验要求 4 中，需要验证的猜想出现 3 分支判断，可用 IF 函数嵌套实现。

实验 13　数字规律的探索

数字与数字之间蕴藏着许多奥秘，一种有趣的现象被称为数字“黑洞”。所谓数字“黑洞”，是指这样的一类数，其他任意数如果经过某种变换变成这类数后，如果再按同样规律去变换，得到的始终就是这个（或这类）数，再也跳不出这个（或这类）数形成的怪圈了。

数字黑洞现象的解读，数字奥秘的发现，需要人们的不断探索。

【实验目的】

通过对数字“黑洞”及“平方数对半和”等数字规律的探索，使学生了解数字“黑洞”及“平方数对半和”的相关知识，掌握利用 Excel 软件解决这些问题的一些基本方法。

13.1　数 字 怪 圈

任选一个 4 位数，求出这个数各数位上的数码的平方和作为新数，再求出这个新数各数位上的数码的平方和作为下一个新数，如此不断重复下去……可以得到一系列的数，仔细观察就会发现，所产生的数列到达某个数后，便形成一个圈子，怎么也转不出去了（图 13.1-1 和图 13.1-2）。所形成的圈子通常称为数字怪圈，也称为数字“黑洞”。

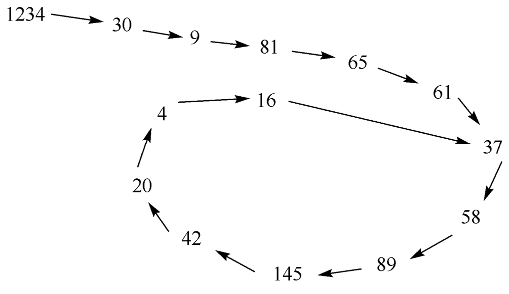


图 13.1-1

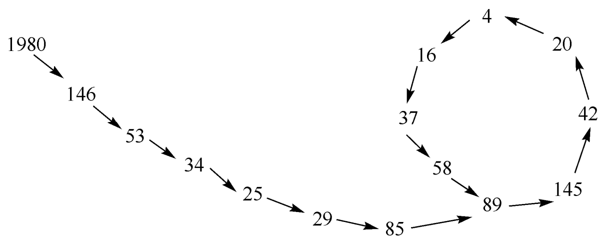


图 13.1-2

数学里有许多这样的数字怪圈。

例如：任取一个数，如果这个数是两位或两位以上，则将其末位截去，并加上此末位数的 5 倍；如果这个数只有一位，那就用它的 5 倍来替换。按这个规则进行变换，每次形成一个新数，构成一个数列。仔细观察，你会发现，所产生的数列到达某个数后，便形成一个圈子，怎么也转不出去了。如果将上述操作视为一种变换，将它作用于一位或两位整数，反复加以变换，就可以形成数字怪圈。

前面形成数字怪圈的规则，也即以上“将一个数截去末位，并加上此末位数的 5 倍”的变换规则，可以用来判断一个位数较多的整数是否能被 7 整除。按以上规则对一个多位数进行若干次变换，则所得新数的位数逐渐减少，若观察到某一步变换后所得的新数能被 7 整除（此种情况下，实际上每个新数都能被 7 整除），则原数必能被 7 整除；反之，原数不能被 7 整除。

命题的正确性证明如下。

设整数 $a=a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$，其中 a_i（$i=0,1,2,\cdots,n$）为十进制数码，则

$$
\begin{aligned}
a &= a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0 \\
&= a_na_{n-1}\cdots a_1\times 10\ +a_0 \\
&\equiv\ a_na_{n-1}\cdots a_1\times 10+50a_0 \quad [\text{因为}\,1\equiv 50(\operatorname{mod}7)] \\
&\equiv 10\text{（}\,a_na_{n-1}\cdots a_1+5a_0\,\text{）}(\operatorname{mod}7)
\end{aligned}
$$

所以，$7|a$ 的充分必要条件是 $7|10(a_na_{n-1}\cdots a_1+5a_0)$。但 7 不能整除 10，因此，$7|a$ 的充分必要条件是 $7|(a_na_{n-1}\cdots a_1+5a_0)$。而将 a 变为 $a_na_{n-1}\cdots a_1+5a_0$，在数值上就是将 a 的末位截去，并加上此末位数的 5 倍。

这种判断整除的方法通过逐次截去原数的末位数进行，通常称为截尾法。

以上用于判断被 7 整除的截尾法可推广到任意与 10 互质的正整数。事实上，设 m 是与 10 互质的正整数，若 x 是满足 $10x\equiv 1\,(\operatorname{mod}m)$ 的正整数，则按照“截去末位，并加上此末位数的 x 倍”的规则进行变换，若某个新数能被 m 整除，那么原数能被 m 整除；若 x 是满足 $10x\equiv -1\,(\operatorname{mod}m)$ 的正整数，则按照“截去末位，并减去此末位数的 x 倍”的规则进行变换，若某个新数能 m 整除，那么原数能被 m 整除。

【实验内容】

1．利用 Excel 软件探索“由一个 4 位数各数位上的数码的平方和作为新数” 所形成的数字怪圈。

2．利用 Excel 软件探索“将一个数截去末位，并加上此末位数的 5 倍得一新数” 所形成的数字怪圈。

13.1.1 实验 1 数字怪圈 1

【实验思路】

在工作表某列第 1 行的单元格输入一个 4 位数，利用 INT 函数将此 4 位数的千位数、百位数、十位数和个位数分别求出，再将千位数、百位数、十位数和个位数的平方和求出并置于 4 位数所在列的下一行。利用填充句柄向下填充即可产生一系列新数，观察新数列即可找到数字怪圈。

【实验设计】

1．打开工作表，在 B1：F1 单元格依次输入原数、千位、百位、十位、个位。

2．在 B2 单元格输入 1980。

3．在 C2：F2 单元格分别输入“=INT(B2/1000)”、“=INT((B2–1000*C2)/100)”、“=INT((B2–1000*C2–100*D2)/10)”、“=B2–1000*C2–100*D2–10*E2”。

4．在 B3 单元格输入“=C2*C2+D2*D2+E2*E2+F2*F2”。

5．依次选定 C2：F2 的各个单元格，利用填充句柄向下填充到 C3：F3（图 13.1-3）。

6．将以上制作的课件以“数字怪圈 1.xls”保存。

F3 =B3-1000*C3-100*D3-10*E3

	A	B	C	D	E	F
1		数列	千位	百位	十位	个位
2		1980	1	9	8	0
3		146	0	1	4	6
4						

图 13.1-3

【实验要求】

1．运行“数字怪圈 1.xls”课件。

2．依次选定 B2：F2 的各个单元格，利用填充句柄向下填充。对填充的区域进行观察，是否从某行开始，B 列中数列的项出现重复，形成“圈”的情况。

3．利用“数字怪圈 1.xls”课件，对若干不同的整数，验证数字怪圈的存在性。总结并记录你的发现及结论。

【经验点拨】

将以上问题中的 4 位数改为 3 位数，同时将这个数“各数码的平方和作为新数”改为“各数码的立方和作为新数”，如果所得新数与原 3 位数相等，则把此 3 位数称为水仙花数。对“数字怪圈 1.xls”课件稍做修改，即可用来求水仙花数。在求水仙花数的课件中，你仍然有可能得到数字怪圈。

13.1.2　实验 2　数字怪圈 2

【实验思路】

在工作表某列第 1 行的单元格输入一个多位数，利用 INT 和 IF 函数判断此数是否为一位数，如果是，则将此数乘以 5 作为新数，如果不是一位数，则将此数截去末位，并加上末位数的 5 倍作为新数。将所得新数置于同一列的下一行。利用填充句柄向下填充即可产生一系列新数，观察新数列即可找到数字怪圈。

【实验设计】

1．打开工作表，在 B1 单元格输入任意整数。

2．在 B2 单元格输入“=IF(INT(B1/10)=0,5*B1,INT(B1/10)+5*(B1–10*INT(B1/10)))”。

3．将以上制作的课件以“数字怪圈 2.xls”保存（图 13.1-4）。

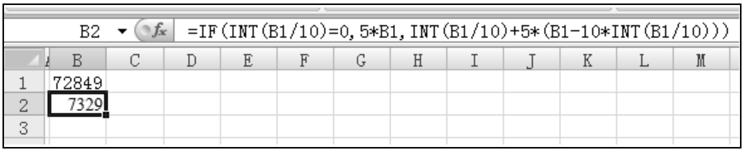


图 13.1-4

【实验要求】

1．运行“数字怪圈 2.xls”课件。

2．选定 B2，利用填充句柄向下填充。观察 B 列所得数字，从中找出数字怪圈。

3．利用“数字怪圈 2.xls”课件，从不同的整数出发，验证数字怪圈的存在性。

4．将“数字怪圈 2.xls”课件的截尾规则改为“截去末位，并减去此末位数的 4 倍”，探索做这样的改变后，是否还存在数字怪圈。总结并记录你的发现及结论。

【经验点拨】

运行“数字怪圈 2.xls”课件，任意整数选择为分别为从 1 开始和从 7 开始，可得两个数字怪圈。有趣的是，这两个数字怪圈，一个中所有的数字都不能被 7 整除（图 13.1-5），而另一个中所有的数字都是 7 的倍数（图 13.1-6）。

“截去末位，并减去此末位数的 4 倍”的截尾规则可用来判断一个整数是否可被 13 整除。

1→5→25→27→37→38→43→19→46→34→23→17→36→33→

18→41→9→45→29→47→39→48→44→24→22→12→11→6→30→

3→15→26→32→13→16→31→8→40→4→20→2→10→1

图 13.1-5

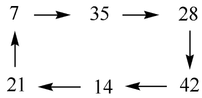


图 13.1-6

13.2 “平方数对半和”

印度数学家乔德哈里（J. V. Chaudhari）和狄希潘特（M. N. Deshpande）发现：从 956 到 968，连续 13 个三位正整数，这些数在各自平方之后，都成了 6 位数。如果把它们各自按前 3 位、后 3 位对半截成两段，再分别将前后两段相加起来，其和竟然又是一连串的平方数。

$$956^2=913936,\quad 913+936=1849,\quad 1849=43^2,$$

$$957^2=915849,\quad 915+849=1764,\quad 1764=42^2,$$

$$\cdots$$

$$967^2=935089,\quad 935+89=1024,\quad 1024=32^2,$$

$$968^2=937024,\quad 937+24=961,\quad 961=31^2.$$

最奇妙的是，左边的平方数的底数 956 至 968 是单调递增的，公差是 1，而经过“平方对半求和”的变换以后，右边平方数的底数 43 到 31 却变成单调递减，公差仍然是 1。这样的一些连续的平方数，它的对半和，竟然又是一些连续的平方数，这实在是太神奇了，这种现象是不是偶然现象，类似这样的数还有没有？

对两位数的情况进行验证后，发现，从 86 到 90 的 5 个正整数，其各自平方后对半分为前两位、后两位两段，再分别相加起来，其和又是一串连续的平方数，并且仍然遵循“左边的平方数是公差为 1 的单调递增数列，右边的平方数是公差为 1 的单调递减数列”的规律：

$$86^2=7396,\quad 73+96=169,\quad 169=13^2,$$

$$87^2=7569,\quad 75+69=144,\quad 144=12^2,$$

$$88^2=7744,\quad 77+44=121,\quad 121=11^2,$$

$$89^2=7921,\quad 79+21=100,\quad 100=10^2,$$

$$90^2=8100,\quad 81+0=81,\quad 81=9^2.$$

对于 4 位、5 位的正整数，有没有这种情况？有多少？都是哪些数？可以利用 Excel 软件进行探索。为方便起见，平方对半求和后能形成平方数的数，暂且称为“平方数对半和”数。

【实验内容】

利用 Excel 软件探索“平方数对半和”形成平方数的现象及其规律。

【实验思路】

在工作表某列第 1 行的单元格输入一个 3 位数，求出这个 3 位数的平方数，利用 INT 函数将此平方数的右 3 位和左 3 位（或 2 位）分离出来，各形成一个新数，将这两个新数的和

求出，最后将此和的算术平方根求出。如果这个算术平方根是一个整数，则表明原输入的 3 位数属于我们探索的“平方数对半和”数。这里要说明的是，我们关注的不是单独出现的“平方数对半和”数，而是成片连续出现的“平方数对半和”数。

【实验设计】

1．打开工作表，在 A1：G1 单元格依次输入序号、原数、平方、左段、右段、对半和、开方。

2．在 A2：G2 单元格依次输入 1、100、“=B2*B2”、“=INT(C2/1000)”、“=C2−1000*D2”、“=D2+E2”、“=SQRT(F2)”。

3．在 A3：B3 单元格依次输入 2 和 101，选定 C2：G2 的各个单元格，利用填充句柄向下填充到 C3：G3。

4．将以上制作的课件以“平方数对半和.xls”保存。

【实验要求】

1．运行“平方数对半和.xls”课件。

2．选定 A2：G3 的各个单元格，利用填充句柄向下填充至 999 行；观察填充区域，从 G 列所得数值中找出成片连续出现的“平方数对半和”数，验证乔德哈里和狄希潘特的发现。

3．设计并运行课件，探索 4 位、5 位正整数的“平方数对半和”数。总结并记录你的发现及结论。

【经验点拨】

用以上方法，可以发现，从 9859 到 9900 的 42 个连续递增正整数，经过平方对半求和的变换后，变成从 140 到 99 这 42 个连续递减正整数的平方。即

$$9859^2=97199881,\quad 9719+9881=19600,\quad 19600=140^2,$$

$$9860^2=97219600,\quad 9721+9600=19321,\quad 19321=139^2,$$

$$\cdots$$

$$9899^2=97990201,\quad 9799+201=10000,\quad 10000=100^2,$$

$$9900^2=98010000,\quad 9801+0=9801,\quad 9801=99^2.$$

利用探索 4 位正整数的“平方数对半和”数课件，可找到的成片连续出现的“平方数对半和”数（图 13.2-1），计 42 个。

若将以上方法应用于 5 位整数的探索，可以找到连续 131 个正整数具有“平方数对半和”数的性质。

	A	B	C	D	E	F	G
1	序号	原数	平方	左段	右段	对半和	开方
2	1	9859	97199881	9719	9881	19600	140
3	2	9860	97219600	9721	9600	19321	139
4	3	9861	97239321	9723	9321	19044	138
5	4	9862	97259044	9725	9044	18769	137
6	5	9863	97278769	9727	8769	18496	136
7	6	9864	97298496	9729	8496	18225	135
8	7	9865	97318225	9731	8225	17956	134
9	8	9866	97337956	9733	7956	17689	133
10	9	9867	97357689	9735	7689	17424	132
11	10	9868	97377424	9737	7424	17161	131
12							
13	31	9889	97792321	9779	2321	12100	110
14	32	9890	97812100	9781	2100	11881	109
15	33	9891	97831881	9783	1881	11664	108
16	34	9892	97851664	9785	1664	11449	107
17	35	9893	97871449	9787	1449	11236	106
18	36	9894	97891236	9789	1236	11025	105
19	37	9895	97911025	9791	1025	10816	104
20	38	9896	97930816	9793	816	10609	103
21	39	9897	97950609	9795	609	10404	102
22	40	9898	97970404	9797	404	10201	101
23	41	9899	97990201	9799	201	10000	100
24	42	9900	98010000	9801	0	9801	99
25	43	9901	98029801	9802	9801	19603	140.0107

图 13.2-1

实验 14　线性规划的求解

线性规划是运筹学中研究较早、理论和算法比较成熟的重要分支之一。它主要研究在线性等式（或不等式）的限制条件下，使某一目标函数取得最大值（或最小值）的问题。随着计算机的发展，线性规划广泛应用于经济分析、经营管理、工程技术和军事作战等方面，为合理地利用有限的人力、物力、财力等资源做出最优决策，提供科学的依据。

【实验目的】

通过利用 Excel 软件“规划求解”求解线性规划问题、线性方程组、最短路问题等，使学生了解 Excel 软件“规划求解”功能及相关知识，掌握利用 Excel 软件解决这些问题的一些基本方法。

14.1　线性规划的求解

一般地，求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题，统称为线性规划问题。

具有 n 个决策变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性规划问题的一般形式为

目标函数：
$$S_{\max}(S_{\min})=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

约束条件：
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_n \\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0 \end{cases}$$

满足线性约束条件的解称为可行解，由所有可行解组成的集合称为可行域。决策变量、约束条件、目标函数是线性规划的三要素。

求解线性规划问题的基本方法是单纯形法。对于只有两个决策变量的简单的线性规划问题，也可采用图解法求解，这种方法仅适用于只有两个决策变量的线性规划问题。当决策变量比较多时，通常需由计算机完成求解。LINDO 和 LINGO 都是求解线性规划问题的优秀专业工具软件。作为 Microsoft Office 软件组件之一的 Excel，其“规划求解”功能强大，可以轻松实现对多个决策变量的线性规划问题的求解，回避了使用线性规划专业求解软件求解时对操作者的专业要求，同时也克服了笔算的缺点，其操作简单、方便、快捷，可大大提高计算的效率和准确性。

【实验内容】

利用 Excel 软件的规划求解功能求解线性规划问题。

线性规划问题如下：

某建筑公司用沙、石料、水泥、钢材 4 种材料进行甲、乙两个工程项目的施工，按照施工要求，甲项目施工时所用沙、石料、水泥、钢材 4 种材料的比例为 8:6:3:2，可获利润为 100 元/m^2。乙项目施工时所用沙、石料、水泥、钢材 4 种材料的比例为 2:3:5:4，可获利润为 120 元/m^2。现有库存沙、石料、水泥、钢材 4 种材料的量分别为 3000 吨、2500 吨、2000 吨、1500 吨。

求：（1）按现有的原料库存，甲、乙两个项目各施工多少平方米时能获得的利润最大？此时的最大利润为多少？（2）要获得利润 50000 元时，甲、乙两个项目应各施工多少平方米?

【实验思路】

问题（1）的求解，可以使用线性规划中的单纯型方法来求解，但其计算是比较复杂的。使用 Excel 规划求解功能来求解，问题就简单得多了。

首先，构建问题的数学模型。

设甲、乙工程项目施工平方米数各为 x_1、x_2，最大利润为 $S_{\max}$，则可得到如下的线性规划数学模型。

目标函数：
$$S_{\max} = 100x_1 + 120x_2$$

约束条件：
$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leqslant 3000 \\ 6x_1 + 3x_2 \leqslant 2500 \\ 3x_1 + 5x_2 \leqslant 2000 \\ 2x_1 + 4x_2 \leqslant 1500 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

按 Excel 规划求解功能的要求，把决策变量、约束条件和目标函数分别输入 Excel 工作表的适当位置。然后打开 Excel“规划求解参数”对话框，设置目标单元格、可变单元格、约束条件，最后单击“求解”按钮求解。

【实验设计】

1．打开工作表，在 C2、D2 单元格分别输入“甲项目”、“乙项目”。

2．在 B3 单元格输入“单位利润”，在 C3、D3 单元格分别输入 100、120。

3．在 C5：E5、G5 单元格分别输入“甲项目比例”、“乙项目比例”、“实际使用”、“库存材料”在 B6：B9 单元格分别输入“沙”、“石料”、“水泥”、“钢筋”；在 C6：C9 单元格分别输入 8、6、3、2，在 D6：D9 单元格分别输入 2、3、5、4。

4．在 E6 单元格输入“=C6*C$12+D6*D$12”，选定 E6，利用填充句柄向下填充至 E9 单元格。

5．在 F6：F9 四个单元格均输入“<=”　。

6．在 G6：G9 单元格分别输入 3000、2500、2000、1500。

7．在 C11、D11、G11 单元格分别输入“甲项目”、“乙项目”、“总利润”。

8．在 B12 输入“施工面积”；在 G12 输入“=C3*C12+D3*D12”。各项输入后见图 14.1-1。

9．将以上制作的课件以“线性规划的求解.xls”保存。


G12　=C3*C12+D3*D12

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			甲项目	乙项目			
3		单位利润	100	120			
4							
5			甲项目比例	乙项目比例	实际使用		库存材料
6		沙	8	2	0	<=	3000
7		石料	6	3	0	<=	2500
8		水泥	3	5	0	<=	2000
9		钢筋	2	4	0	<=	1500
10							
11			甲项目	乙项目			总利润
12		施工面积					0

图 14.1-1

说明：在实施以上线性规划问题求解时，可按以下实施步骤进行。

1．在“数据”选项卡菜单中，选择“规划求解”选项，打开“规划求解参数”对话框，设置目标单元格、可变单元格和约束条件：

在“设置目标单元格”栏中输入表示目标函数值的单元格地址G12（也可直接单击 G12 单元格），并在“等于”一栏中选择“最大值”单选项。

在“可变单元格”一栏中输入决策变量的单元格地址“C12：D12”（图 14.1-2）。

图 14.1-2

在“约束”中，单击“添加”按钮，在弹出的“添加约束”对话框中添加约束条件（图 14.1-3）：在“单元格引用位置”输入决策变量的单元格地址“C12：D12”，将其右的关系运算符选为“>=”，在“约束值”栏中输入 0 ，单击“添加”按钮完成第一个约束条件的设置并进入第二个约束条件的设置；在“单元格引用位置”输入表示各种材料实际使用量的单元格地址“E6：E9”，将其右的关系运算符选为“<=”，在“约束值”栏中输入表示各种材料库存量的单元格地址“G6：G9”，单击“确定”按钮完成约束条件的设置（图 14.1-4）。

图 14.1-3

图 14.1-4

2．单击“选项”按钮，在弹出的“规划求解选项”对话框中，选定“采用线性模型”复选项，其他参数不变（图 14.1-5），单击“确定”按钮返回“规划求解参数”对话框。

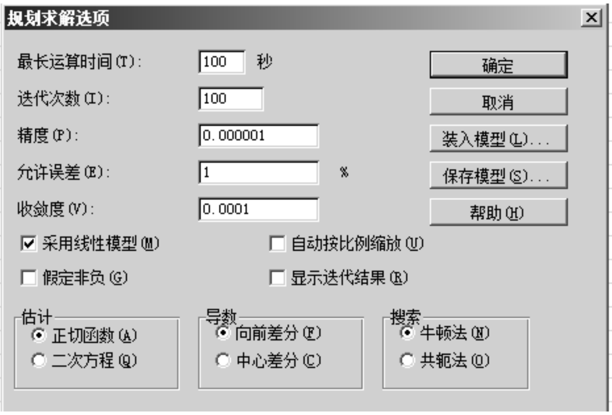


图 14.1-5

3．单击“规划求解参数”对话框右上角的“求解”按钮，系统开始进行规划求解。

4．在弹出的“规划求解结果”对话框中（图 14.1-6），选中“保存规划求解结果”单选项，单击“确定”按钮，在该模型有可行解的情况下，即可求得该线性规划的解（图 14.1-7）。

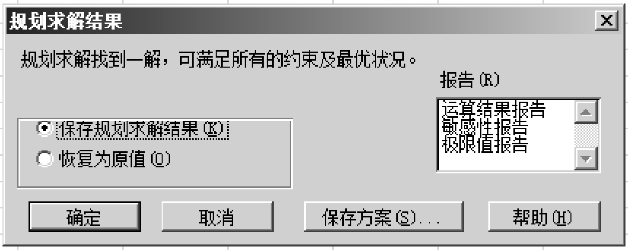


图 14.1-6

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			甲项目	乙项目			
3		单位利润	100	120			
4							
5			甲项目比例	乙项目比例	实际使用		库存材料
6		沙	8	2	2904.762	<=	3000
7		石料	6	3	2500	<=	2500
8		水泥	3	5	2000	<=	2000
9		钢筋	2	4	1476.19	<=	1500
10							
11			甲项目	乙项目			总利润
12		施工面积	309.52381	214.285714			56666.67
13							

图 14.1-7

【实验要求】

1．运行“线性规划的求解.xls”课件，按课件后的实施步骤实施问题（1）的求解。记录求解结果。

2．利用“线性规划的求解.xls”课件求解问题（2），即求解“要获得利润 50000 元时，甲、乙两个项目应各施工多少平方米”的问题。

【经验点拨】

以上线性规划求解课件，在模型有可行解的情况下，即可求得该线性规划的解；若模型无解，则在弹出的“规划求解结果”对话框中显示的是“规划求解找不到有用的解”。

若要利用规划求解功能求解问题（2），即求解“要获得利润 50000 元时，甲、乙两个项目应各施工多少平方米”的问题，则只需在“设置目标单元格”及其值时，在“等于”一栏中选择“值为”单选项（图 14.1-8），并在其右的文本栏中输入 50000，而其他步骤不变，然后求解即可。要注意的是，求解结果只显示一个解，而满足条件的解往往不止一个（图 14.1-9 和图 14.1-10）。

图 14.1-8

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			甲项目	乙项目			
3		单位利润	100	120			
4							
5			甲项目比例	乙项目比例	实际使用		库存材料
6		沙	8	2	1625	<=	3000
7		石料	6	3	1687.5	<=	2500
8		水泥	3	5	1937.5	<=	2000
9		钢筋	2	4	1500	<=	1500
10							
11			甲项目	乙项目			总利润
12		施工面积	125	312.5			50000
13							

图 14.1-9

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			甲项目	乙项目			
3		单位利润	100	120			
4							
5			甲项目比例	乙项目比例	实际使用		库存材料
6		沙	8	2	2632	<=	3000
7		石料	6	3	2244	<=	2500
8		水泥	3	5	1752	<=	2000
9		钢筋	2	4	1288	<=	1500
10							
11			甲项目	乙项目			总利润
12		施工面积	284	180			50000
13							

图 14.1-10

14.2 线性方程组的求解

【实验内容】

利用 Excel 软件的规划求解功能求解线性方程组。

以 4 元线性方程组为例：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

【实验思路】

将线性方程组视为线性规划的特殊情形。以方程组中一个方程作为目标函数；将方程组中各个方程作为约束条件；方程组中各个变量作为决策变量。按 Excel 软件的规划求解方法求解。

【实验设计】

1．在 A2：A7 单元格分别输入“方程 1”、“方程 2”、“方程 3”、“方程 4”、“可变单元”、“目标函数”；在 B1：E1、G1、I1 单元格分别输入“系数 1”、“系数 2”、“系数 3”、“系数 4”、“约束表达式”、“常数”。

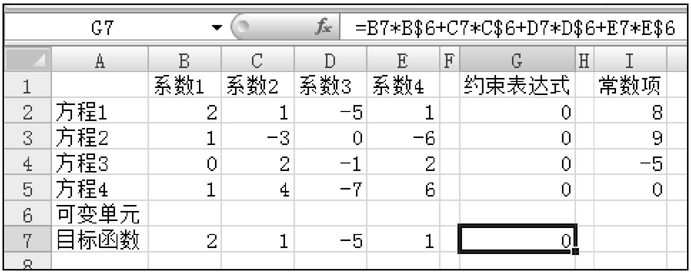
2．在 B2：E5 区域中输入方程组各方程的系数，在 I2：I5 单元格输入方程组各方程的常数。

3．将 B6：E6 的 4 个单元格设为决策变量单元。

4．在 G2：G5 单元格设置约束表达式，在 G2 中输入“=B2*B$6+C2*C$6+D2*D$6+E2*E$6”，选定 G2 单元格，利用填充句柄向下填充至 G5 单元格。

5．在 B7：E7 单元格依次输入方程 1 的各个系数。

6．在 G7 单元格设置目标函数，输入“=B7*B$6+C7*C$6+D7*D$6+E7*E$6”（图 14.2-1）。



G7　=B7*B$6+C7*C$6+D7*D$6+E7*E$6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		系数1	系数2	系数3	系数4		约束表达式		常数项
2	方程1	2	1	-5	1		0		8
3	方程2	1	-3	0	-6		0		9
4	方程3	0	2	-1	2		0		-5
5	方程4	1	4	-7	6		0		0
6	可变单元								
7	目标函数	2	1	-5	1		0		
8									

图 14.2-1

7．将以上制作的课件以“线性方程组的求解.xls”保存。

求解实施步骤如下。

1．在“数据”选项卡菜单中，选择“规划求解”选项，打开“规划求解参数”对话框，设置目标单元格、可变单元格和约束条件：

在“设置目标单元格”栏中输入表示目标函数值的单元格地址G7（也可直接单击 G7 单元格），并在“等于”一栏中选择“值为”单选项，并在其右的文本栏中输入 8。

在“可变单元格”一栏中输入决策变量的单元格地址“B6：E6”。

在“约束”中，通过“添加”按钮，在弹出的“添加约束”对话框中添加约束条件：在“单元格引用位置”输入表示“约束表达式”的单元格地址“\$G\$2：\$G\$5”，将其右的关系运算符选为“=”，在“约束值”栏中输入表示“常数”单元格地址“\$I\$2：\$I\$5”，单击“确定”按钮完成约束条件的设置（图 14.2-2）。

图 14.2-2

2．单击“选项”按钮，在弹出的“规划求解选项”对话框中，选定“采用线性模型”复选项，其他参数不变，单击“确定”按钮，返回“规划求解参数”对话框。单击“规划求解参数”对话框右上角的“求解”按钮，系统开始进行规划求解。

3．在弹出的“规划求解结果”对话框中，选中“保存规划求解结果”单选项，单击“确定”按钮，即可求得该线性方程组的解（图 14.2-3）：

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		系数1	系数2	系数3	系数4		约束表达式		常数项
2	方程1	2	1	-5	1		8		8
3	方程2	1	-3	0	-6		9		9
4	方程3	0	2	-1	2		-5		-5
5	方程4	1	4	-7	6		0		0
6	可变单元	3	-4	-1	1				
7	目标函数	2	1	-5	1		8		
8									

图 14.2-3

【实验要求】

1．运行“线性方程组的求解.xls”课件。记录你的求解结果。

2．利用“线性方程组的求解.xls”课件求解下列线性方程组。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

【经验点拨】

利用 Excel 软件的规划求解功能求线性方程组的解时，可以方程组中任意一个方程作为目标函数。

14.3　最短路问题的求解

最短路问题是网络理论中应用最广泛的问题之一。许多优化问题，如设备更新、管道铺设、线路安排和厂区布局等，都可以使用这个模型。最短路问题最普遍的应用是在两个点之间寻找最短路。

【实验内容】

利用 Excel 软件的规划求解功能求解最短路问题。

以求图中从 A 到 H 的最短路（图 14.3-1）为例。

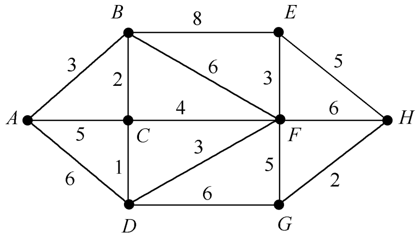


图 14.3-1

【实验思路】

将图中任意两点间的边视为始点、终点相反的两条有向边，通过始点和终点描述每条有向边；以每条有向边的“选用”为决策变量；称每条有向边的权值为“边权”，通过有向边的“选用”和“边权”计算有向边的“权值”，构建目标函数；由每个顶点的进入边和走出边“选用”的代数和构成约束条件；以 1 和–1 分别作为起点和终点的约束值，以 0 作为其余顶点的约束值。按 Excel 软件的规划求解方法求解。

【实验设计】

1. 在 A1：H1 单元格区域依次输入“起点”、“终点”、“边权”、“选用”、“权值”、“顶点”、“约束条件”、“约束值”。

2．在 A2：B31 单元格区域将每条边的起点、终点填入（每条边因起点、终点选取的不同而出现两次）。

3．在 C2：C31 单元格区域中输入各条边的边权。

4．在 E2：E31 计算权值，在 E2 单元格输入“=C2*D2”，选定 E2 单元格，利用填充句柄向下填充至 E31 单元格。

5．在 F2：F9 单元格中依次输入 A、B、C、D、E、F、G、H。

6．在 G2：G9 单元格中输入各顶点的约束条件，各顶点的约束条件由顶点进入边和走出边的“选用”的代数和构成。如 A 作为起点和终点各有 3 条边，其约束条件为“=D2+D3+D4−D5−D9−D13”；计算出其余各边的约束条件并输入相应的单元格（图 14.3-2）。

G2　=D2+D3+D4-D5-D9-D13

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	起点	终点	边权	选用	权值	顶点	约束条件	约束值
2	A	B	3		0	A	0	1
3	A	C	5		0	B	0	0
4	A	D	6		0	C	0	0
5	B	A	3		0	D	0	0
6	B	C	2		0	E	0	0
7	B	E	8		0	F	0	0
8	B	F	6		0	G	0	0
9	C	A	5		0	H	0	-1
10	C	B	2		0			
11	C	D	1		0			
12	C	F	4		0			
13	D	A	6		0			
14	D	C	1		0			
15	D	F	3		0			
16	D	G	6		0			
17	E	B	8		0			
18	E	F	3		0			
19	E	H	5		0			
20	F	B	6		0			
21	F	C	4		0			
22	F	D	3		0			
23	F	E	3		0			
24	F	G	5		0			
25	F	H	6		0			
26	G	D	6		0			
27	G	F	5		0			
28	G	H	2		0			
29	H	E	5		0			
30	H	F	6		0			
31	H	G	2		0			
32	目标函数				0			
33								

图 14.3-2

7．在 H2：H9 单元格输入各顶点的约束值，其中 H2、H 9 分别为 1 和−1，其余单元格均为 0。

8．在 E32 单元格设置目标函数“=SUM(E2:E31)”。

9．将以上制作的课件以“最短路问题的求解.xls”保存。

求解实施步骤如下。

1．选择“数据”菜单中“规划求解”选项，打开“规划求解参数”对话框，设置目标单元格、可变单元格和约束条件：

在“设置目标单元格”栏中输入表示目标函数值的单元格地址E32（也可直接单击 E32 单元格），并在“等于”一栏中选择“最小值”单选项。

在“可变单元格”一栏中输入决策变量的单元格地址“D2：D31”。

在“约束”中，通过“添加”按钮，添加约束条件：“\$D\$2:\$D\$31<=1”，“\$D\$2:\$D\$31=整数”，“\$D\$2:\$D\$31>=0”，“\$G\$2:\$G\$9 = \$H\$2:\$H\$9”；单击“确定”按钮完成约束条件的设置（图 14.3-3）。

图 14.3-3

2．单击“选项”按钮，在弹出的“规划求解选项”对话框中，选定“采用线性模型”复选项，其他参数不变（图 14.3-4），单击“确定”按钮返回“规划求解参数”对话框。

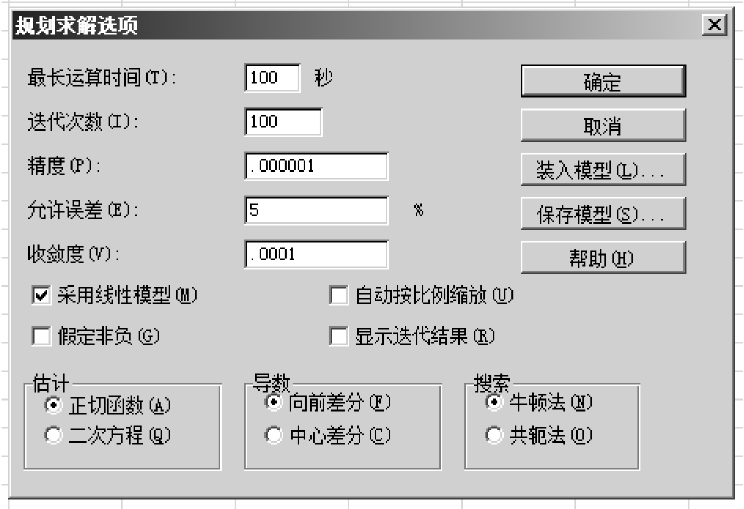


图 14.3-4

3．单击“规划求解参数”对话框右上角的“求解”按钮，系统开始进行规划求解。

4．在弹出的“规划求解结果”对话框中，选中“保存规划求解结果”单选项，单击“确定”按钮，即可求得该最短路问题的解（图 14.3-5）。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	起点	终点	边权	选用	权值	顶点	约束条件	约束值
2	A	B	3	1	3	A	1	1
3	A	C	5	0	0	B	0	0
4	A	D	6	0	0	C	0	0
5	B	A	3	0	0	D	0	0
6	B	C	2	1	2	E	0	0
7	B	E	8	0	0	F	0	0
8	B	F	6	0	0	G	0	0
9	C	A	5	0	0	H	-1	-1
10	C	B	2	0	0			
11	C	D	1	1	1			
12	C	F	4	0	0			
13	D	A	6	0	0			
14	D	C	1	0	0			
15	D	F	3	0	0			
16	D	G	6	1	6			
17	E	B	8	0	0			
18	E	F	3	0	0			
19	E	H	5	0	0			
20	F	B	6	0	0			
21	F	C	4	0	0			
22	F	D	3	0	0			
23	F	E	3	0	0			
24	F	G	5	0	0			
25	F	H	6	0	0			
26	G	D	6	0	0			
27	G	F	5	0	0			
28	G	H	2	1	2			
29	H	E	5	0	0			
30	H	F	6	0	0			
31	H	G	2	0	0			
32	目标函数				14			

图 14.3-5

【实验要求】

1．运行“最短路问题的求解.xls”课件，按课件后的实施步骤实施求解。记录求解结果。

2．利用“最短路问题的求解.xls”课件求本节所求最短路问题图中从 B 到 H 的最短路。

【经验点拨】

添加约束条件 “\$D\$2:\$D\$31=整数”时，在“单元格引用位置”输入决策变量的单元格地址“\$D\$2:\$D\$31”，将其右的关系运算符项选为“int”，则“约束值”栏中自动出现“整数”；单击“添加”按钮完成本约束条件的设置并进入下一个约束条件的设置（或单击“确定”按钮完成约束条件的设置）。

最短路问题的解往往不唯一，以上最短路问题的解有两个（图 14.3-5 和图 14.3-6）。

重复运行“最短路问题的求解.xls”课件求解并得出解时，“约束条件”中实际值可能会与设定的约束值有很小的误差，如很接近 0 的数“1.11E−16”等。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	起点	终点	边权	选用	权值	顶点	约束条件	约束值
2	A	B	3	0	0	A	1	1
3	A	C	5	0	0	B	0	0
4	A	D	6	1	6	C	0	0
5	B	A	3	0	0	D	0	0
6	B	C	2	0	0	E	0	0
7	B	E	8	0	0	F	0	0
8	B	F	6	0	0	G	0	0
9	C	A	5	0	0	H	−1	−1
10	C	B	2	0	0			
11	C	D	1	0	0			
12	C	F	4	0	0			
13	D	A	6	0	0			
14	D	C	1	0	0			
15	D	F	3	0	0			
16	D	G	6	1	6			
17	E	B	8	0	0			
18	E	F	3	0	0			
19	E	H	5	0	0			
20	F	B	6	0	0			
21	F	C	4	0	0			
22	F	D	3	0	0			
23	F	E	3	0	0			
24	F	G	5	0	0			
25	F	H	6	0	0			
26	G	D	6	0	0			
27	G	F	5	0	0			
28	G	H	2	1	2			
29	H	E	5	0	0			
30	H	F	6	0	0			
31	H	G	2	0	0			
32	目标函数				14			
33								

图 14.3-6

参 考 文 献

[1] 李尚志，陈发来，等. 数学实验. 北京：高等教育出版社，2011.

[2] 陶维林. 几何画板实用范例教程（第 3 版）. 北京：清华大学出版社，2013.

[3] 朱俊杰，缪亮，周传高. 几何画板课件制作百例. 北京：清华大学出版社，2005.

[4] 张小红，张建勋. 数学软件与数字实验. 北京：清华大学出版社，2004.

[5] 秦喜文，董小刚. 数学实验. 北京：科学出版社，2016.

[6] 汪晓虹，周含策. 高等数学实验（第 2 版）. 北京：国防工业出版社，2016.